電気・電子回路　解答例（問 1）

(1)

$$Z_1 = \frac{\cos\beta x \cdot V_x + jZ_0 \sin\beta x \cdot I_x}{\frac{j\sin\beta x}{Z_0} \cdot V_x + \cos\beta x \cdot I_x}$$
$$= \frac{\cos\beta x \cdot Z_x + jZ_0 \sin\beta x}{\frac{j\sin\beta x}{Z_0} \cdot Z_x + \cos\beta x}$$

(2)

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 1m$$

$$\beta x = \frac{2\pi}{\lambda} x = 2\pi \times 0.75 = \frac{3}{2}\pi$$
$$\therefore\ \cos\beta x = 0, \quad \sin\beta x = -1$$

ここで、

$$Z_1 \to Z_p, \quad Z_x \to Z_l$$

と置き換えると、

$$Z_p = \frac{{Z_0}^2}{Z_l}$$

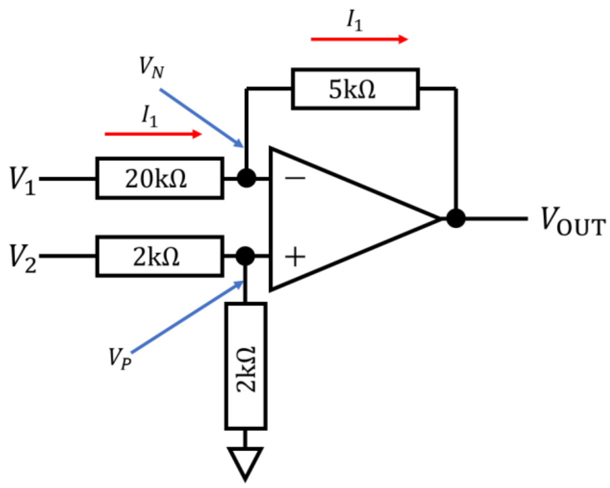
$$Z_0 = 50, \quad Z_l = R + j\omega L = 50 + j2\pi \times 3 \times 10^8 \times \frac{1}{6\pi} \times 10^{-6} = 50 + j100$$

より

$$Z_p = \frac{50^2}{50+j100} = \frac{50}{1+j2} = \frac{50(1-j2)}{1+4} = 10 - j20\ \Omega$$

電気・電子回路　解答例（問 2）

(1)



負帰還構成をとっていることから、オペアンプの特徴からV_PとV_Nは同電位となり、$V_N = V_P = \frac{V_2}{2}$。

V_1からV_{OUT}を流れる電流I_1と 2 つの抵抗を考えると、$V_1 - V_N = 20 \times 10^3 \times I_1$，$V_N - V_{\mathrm{OUT}} = 5 \times 10^3 \times I_1$[V]となることから

$$V_{\mathrm{OUT}} = \frac{V_2}{2} - \frac{1}{4}(V_1 - V_N) = -\frac{V_1}{4} + \frac{5V_2}{8}$$ [V]となる。

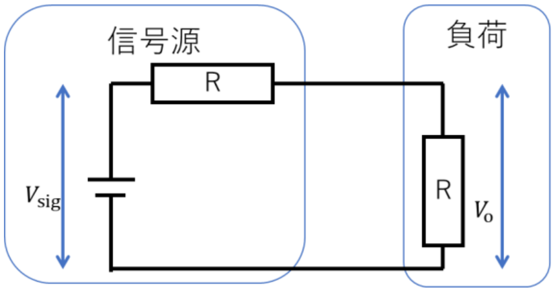
(2)

（ア）　$V_{out} = V_{in}$

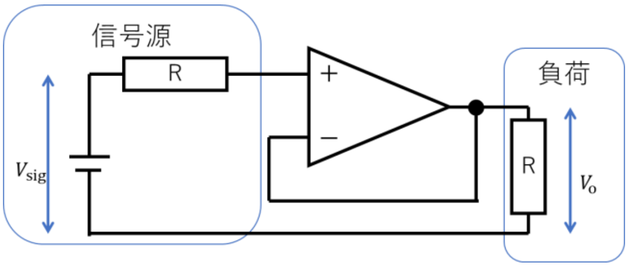
（解説）ボルテージフォロワなので、オペアンプのパラメータは関係なく増幅率 1 倍。

（別解）オペアンプの基本式$V_{out} = A(V_+ - V_-)$に、$V_+ = V_{in}, V_- = V_{out}$を代入して計算すると，$V_{out} = \frac{A}{1+A}V_{in}$となる。$A$が大きいとき$\frac{A}{1+A} \approx 1$となるので、最初の回答とおなじになる。

（イ）　　　インピーダンスの変換、回路の分離。

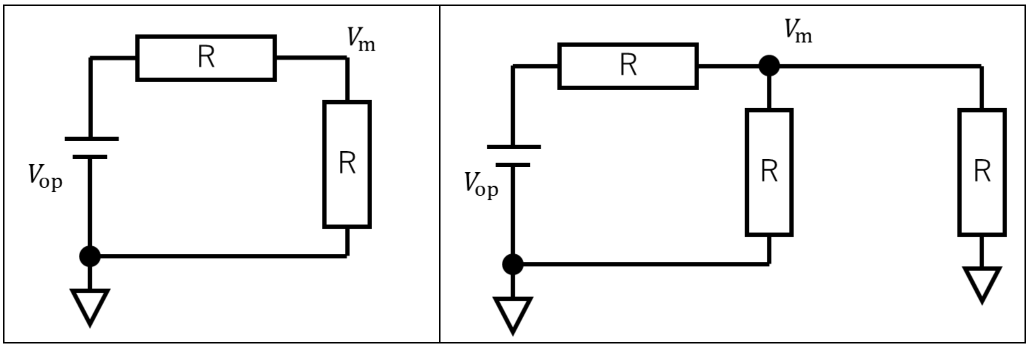


インピーダンスの変換：出力インピーダンスが高い信号源にインピーダンスの低い負荷を接続すると、負荷にかかる電圧が信号源の電圧とずれてしまう。ボルテージフォロワを挿入し、信号源の電圧を適切に負荷に与えるようにする。

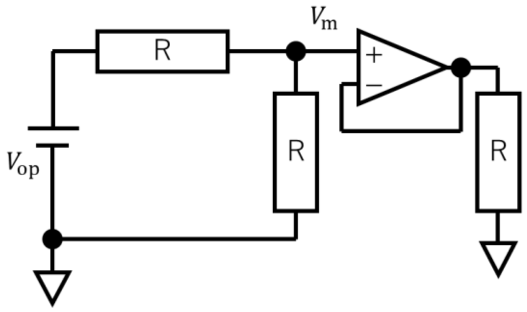


ボルテージフォロワを使用しない場合、V_{sig}とV_{o}の値が異なり、負荷に対して信号源が出力する電圧と同じ電圧が印加できない。

使用した場合、V_{sig}とV_{o}の値を同じにでき、負荷に正確な信号源電圧が印加できる。



回路の分離：既存回路の一部（上図左）に負荷を追加した（上図右のR）とき、負荷が追加されたことで追加した部分の電圧が変化する。左図の場合、$V_m = \frac{1}{2}V_{\mathrm{op}}$となるが，右図のように新たに負荷を追加した場合、$V_{\mathrm{m}} = \frac{1}{3}V_{\mathrm{op}}$となる。



左図のようにボルテージフォロワを追加すると、$V_m = \frac{1}{2}V_{\mathrm{op}}$とでき，追加した負荷が元の回路に与える影響を最小限にできる。

電磁気学　解答例

問 1

(1) A の全電荷量は$\frac{4\pi}{3}a^3\rho$、半径$r < a$の球内に含まれる電荷量は$\frac{4\pi}{3}r^3\rho$

$a < |\vec{r}|$の位置$\vec{r}$での電場は、$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{4\pi}{3}a^3\rho \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

$|\vec{r}| < a$の位置$\vec{r}$での電場は、$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$

(2) $a < |\vec{r}|$の位置$\vec{r}$での電位は　$\phi(\vec{r}) = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|}$

$|\vec{r}| < a$の位置$\vec{r}$での電位は　$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}|\vec{r}|^2 + \frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0}$

(3) $\frac{a^2\rho}{3\varepsilon_0} \times 4\pi a^2 \Delta a \rho = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 a^4 \Delta a$

(4) $\frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho^2 \int_0^a a^4 \mathrm{d}a = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5$

(5) $a < |\vec{r}|$の位置$\vec{r}$での電場は、$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{(a^3 - b^3)\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

$b < |\vec{r}| < a$の位置$\vec{r}$での電場は、$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{b^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

$|\vec{r}| < b$の位置$\vec{r}$での電場は、$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$

(6) $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r} - \vec{d}\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}$

電磁気学　解答例

問 2

(1) 円環状鉄心の内部と外部においてアンペールの法則を適用する。

円環状鉄心の内部では、

$$H \times 2\pi r = NI \qquad \therefore H = \frac{N}{2\pi r} I$$

円環状鉄心の外部では、H=0

(2) $B = \mu H = \mu \frac{N}{2\pi r} I$

(3) $\Phi = \pi a^2 B = \frac{\mu a^2 N}{2r} I$

(4) 一次コイルに電流 I を流したときの円環状鉄心内部の磁束Φは$\frac{\mu a^2 N_1}{2r} I$となるから、一次コイルとの鎖交磁束Φ_1

は、$\Phi_1 = N_1 \Phi = \frac{\mu a^2 N_1^2}{2r} I$

(5) $L_1 = \frac{\mu a^2 N_1^2}{2r}$

(6) $L_2 = \frac{\mu a^2 N_2^2}{2r}$

(7) 一次コイルに電流 I を通すときに生ずる磁束Φと二次コイルとの鎖交磁束Φ_{12}は、

$$\Phi_{12} = N_2 \Phi = \frac{\mu a^2 N_1 N_2}{2r} I$$

したがって、相互インダクタンスは、

$$M = \frac{\mu a^2 N_1 N_2}{2r}$$

(8)　(5)、(6)、(7)で得た L_1, L_2, M の式より、

$$L_1 L_2 = \frac{\mu^2 a^4 N_1^2 N_2^2}{(2r)^2} = M^2$$

$$\therefore \ M = \sqrt{L_1 L_2}$$

機械力学・制御工学

問１.

(a)

$$M\frac{d^2U}{dt^2}+C\frac{dU}{dt}+KU=0$$

(b)

$$2\sqrt{MK}$$

(c)

$$\sqrt{\frac{K}{M}}$$

(d)

$$M\frac{d^2U}{dt^2}+C\frac{dU}{dt}+KU=P\cos\Omega t$$

(e)

$U=a\cos\Omega t$と仮定して C=0 とした運動方程式に代入すると、

$$(-M\Omega^2+K)a\cos\Omega t=P\cos\Omega t$$

両辺の係数比較より、

$$a=\frac{P}{-M\Omega^2+K}$$

よって、

$$U=\frac{P}{-M\Omega^2+K}\cos\Omega t$$

問２.

(a)

$U=a\cos\Omega t+b\,\sin\Omega t$と仮定して運動方程式に代入すると、

$$\{(-M\Omega^2+K)a+C\Omega b\}\cos\Omega t+\{-C\Omega a+(-M\Omega^2+K)b\}\sin\Omega t=P\cos\Omega t$$

両辺の係数比較より、

$$(-M\Omega^2+K)a+C\Omega b=P$$
$$-C\Omega a+(-M\Omega^2+K)b=0$$

よって,

$$a=\frac{-M\Omega^2+K}{(-M\Omega^2+K)^2+(C\Omega)^2}P,\quad b=\frac{C\Omega}{(-M\Omega^2+K)^2+(C\Omega)^2}P$$

(b) 振幅 A は、

$$A=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{P}{\sqrt{(-M\Omega^2+K)^2+(C\Omega)^2}}$$

(c) 位相角ϕは、次の式を満足する。

$$\cos\phi=\frac{-M\Omega^2+K}{\sqrt{(-M\Omega^2+K)^2+(C\Omega)^2}},\quad \sin\phi=\frac{C\Omega}{\sqrt{(-M\Omega^2+K)^2+(C\Omega)^2}}$$

$\Omega=\sqrt{K/M}$のとき、

$$A=\frac{P}{C\sqrt{K/M}}=\frac{P}{2K}\frac{2\sqrt{MK}}{C}$$

また、$\cos\phi=0,\ \sin\phi=1$より、 $\phi=\pi/2$

機械力学・制御工学

問 3

(1)

(a) RLC 回路の伝達関数：

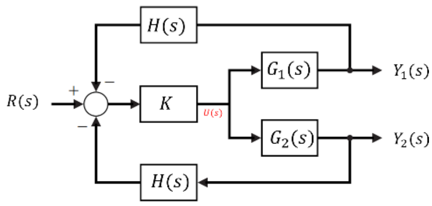
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

(b)

固有角周波数： $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,　　減衰係数 $\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

過減衰となる条件：$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} > 1$

(2)



$G_1(s)$の入力を$U(s)$とすると、$Y_1(s) = G_1(s)U(s)$

$$Y_2(s) = G_2(s)U(s) = \frac{G_2(s)}{G_1(s)}\mathrm{Y}_1(s)$$

$$U(s) = K[R(s) - H(s)Y_1(s) - H(s)Y_2(s)]$$

$$Y_1(s) = KG_1(s)\left[R(s) - H(s)Y_1(s) - H(s)\frac{G_2(s)}{G_2(s)}\mathrm{Y}_1(s)\right]$$

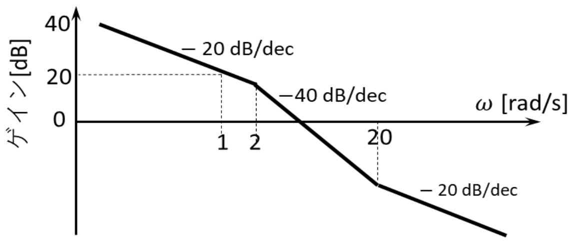
$\frac{Y_1(s)}{KG_1(s)} + H(s)Y_1(s) + H(s)\frac{G_2(s)}{G_1(s)}\mathrm{Y}_1(s) = R(s)$;　　＞＞　$\frac{Y_1(s)(1+KG_1(s)H(s)+KG_2(s)H(s))}{KG_1(s)} = R(s)$

$$Y_1(s) = \frac{KG_1(s)}{1+KG_1(s)H(s)+KG_2(s)H(s)}R(s)$$

(3)

$$\mathrm{G(s)} = \frac{(s+20)}{\mathrm{s(s+2)}} = \frac{10\left(\frac{s}{20}+1\right)}{\mathrm{s}\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

$\omega = 1$:　$20\log_{10} 10 = 20\,dB$,



機械力学・制御工学

問 4

(1)

(a) $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+3s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+1} - \frac{4}{s+2}\right] = 4e^{-t} - 4e^{-2t}$

(b) システムの 2 つの極は -1, -2 であり，実部がともに負であるため，システムは安定である

（別解）$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ より，システムは安定である

(2)

(a) 定常偏差 $\mathcal{E} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{40}{s+10}} = \lim_{s\to 0} \frac{s+10}{s+50} = 0.2$

（別解）閉ループ伝達関数　$W(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{40}{s+10}}{1+\frac{40}{s+10}} = \frac{40}{s+50}$

よって，ステップ応答に対する最終値 $y_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot W(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{40}{s+50} = 0.8$

従って，定常偏差 $\mathcal{E} = 1 - 0.8 = 0.2$

(b) 定常偏差 $\mathcal{E} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{6}{s^2+3s}} = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+3)}{s^2+3s+6} = 0$

（別解）閉ループ伝達関数　$W(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{6}{s^2+3s}}{1+\frac{6}{s^2+3s}} = \frac{6}{s^2+3s+6}$

よって，ステップ応答に対する最終値 $y_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot W(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{6}{s^2+3s+6} = 1$

従って，定常偏差 $\mathcal{E} = 1 - 1 = 0$

(3)

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{K(s+1)}}{\mathrm{s}\left(\frac{\mathrm{s}}{10}+1\right)^2}$$

$\omega = 1$:　$20\log_{10}\frac{K}{\omega} = 20 \gg \log_{10} K = 1 \gg K = 10$

$$\mathrm{G(s)} = \frac{10(\mathrm{s}+1)}{\mathrm{s}\left(\frac{\mathrm{s}}{10}+1\right)^2}$$

電気・機械数学

問 1.

(a-1)

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty (e^{at})e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty=0-\left(-\frac{1}{s-a}\right)=\frac{1}{s-a}$$

(a-2) 部分積分法を使って、

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty te^{-st}dt$$
$$=\int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)' tdt$$
$$=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}t\right]_0^\infty-\int_0^\infty\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)(t)'dt$$
$$=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}t\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$
$$=0+\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}$$

(b) 両辺をラプラス変換すると、

$$\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)=sF(s)-2$$
$$\mathcal{L}\left[f''^{(t)}\right]=s\mathcal{L}[f'(t)]-f'(0)$$
$$=s\{sF(s)-f(0)\}-f'(0)$$
$$=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2F(s)-2s-3$$

より

$$\{s^2F(s)-2s-3\}-2\{sF(s)-2\}+F(s)=0$$

$$F(s)=\frac{2s-1}{s^2-2s+1}=\frac{2(s-1)+1}{(s-1)^2}=\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{2}{s-1}$$

これを逆変換すると、

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=te^t+2e^t=(t+2)e^t$$

電気・機械数学

問 2.

(a)

合力は、$\vec{F}=\left(4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}\right)+\left(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)=7\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ [N]

変位は、$\vec{s}=\left(5\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\right)-\left(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right)=4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ [m]

仕事は、$\vec{F}\cdot\vec{s}=28+4+8=40$ [Nm、J いずれでも可]

(b-1)

$$\mathrm{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & x^2 & -2z\end{vmatrix}=(0-0)\vec{i}+(0-0)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=0$$

(b-2)

$$\begin{aligned}\varphi &= \textstyle\int_0^x f(x,y,z)\,dx+\int_0^y g(0,y,z)\,dy+\int_0^z h(0,0,z)\,dz\\ &=\int_0^x (2xy)\,dx+\int_0^y (0^2)\,dy+\int_0^z (-2z)\,dz\\ &=[x^2y]_0^x-[z^2]_0^z=x^2y-0^2y-(z^2-0^2)=x^2y-z^2\end{aligned}$$

(b-3)

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}=2xy\vec{i}+x^2\vec{j}-2z\vec{k}$$

電気・機械数学

問 3.

(1)

行列$\boldsymbol{A}$の固有値をλとし、固有ベクトルを$\boldsymbol{r}(={}^{t}(x,y))$とすると、それらの定義より$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ が成り立つ。ただし$\boldsymbol{I},\boldsymbol{0}$ はそれぞれ単位行列、零ベクトルを表す。すなわち

$$\begin{pmatrix}-8-\lambda & 3\\ -18 & 7-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad (3-1)$$

となる。

題意より、行列$\boldsymbol{A}$の固有値は 1, -2 と分かる（以降、各固有値をそれぞれλ_1, λ_2とする）。(3-1)式に$\lambda=\lambda_1(=1)$を代入すると

$$-9x+3y=0 \qquad (3-2)$$

が得られ、$\lambda=\lambda_2(=-2)$ を代入すると

$$-6x+3y=0 \qquad (3-3)$$

が得られる。$\lambda_1(=1), \lambda_2(=-2)$に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2}$ とすると

$$\boldsymbol{r}_1={}^{t}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{3x_1}) \qquad (3-4)$$

$$\boldsymbol{r}_2={}^{t}(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{2x_2}) \qquad (3-5)$$

となる。但し x_1,x_2 は、各固有ベクトルの任意定数である。よって正則行列$\boldsymbol{T}$は

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$$

$$=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ 3x_1 & 2x_2\end{pmatrix} \qquad (3-6)'$$

となる。

$|\boldsymbol{T}|=-x_1x_2$

となるため、題意（det $\boldsymbol{T}=-1$）を満たす$x_1x_2=1$ となる。x_1, x_2 ともに$\boldsymbol{T}$の行列要素として含まれているため、題意（$\boldsymbol{T}$の行列要素は全て自然数）を満たすものは$x_1=x_2=1$ のみとなる。よって

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} \qquad (3-6)$$

が

解となる。また $\boldsymbol{T}$の逆行列$\boldsymbol{T^{-1}}$は

$$\boldsymbol{T^{-1}}=\frac{1}{2-3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} \qquad (3-7)$$

となる。

(2)

正則行列$\boldsymbol{T}$およびその逆行列$\boldsymbol{T^{-1}}$を用いると行列$\boldsymbol{A}$は

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{T^{-1}} \qquad (3-8)$$

と表せる。

よって

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{T^{-1}}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{T^{-1}} \dots$$

$$= \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \dots \boldsymbol{T^{-1}}$$

$$= \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\boldsymbol{T^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 + 3(-2)^n & 1 - (-2)^n \\ -6 + 6(-2)^n & 3 - 2(-2)^n \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

と得られる。

(3)

$$\exp(\boldsymbol{A}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\boldsymbol{T^{-1}}$$

$$= \boldsymbol{T}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{n!}\lambda_1^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!}\lambda_2^n \end{pmatrix}\boldsymbol{T^{-1}}$$

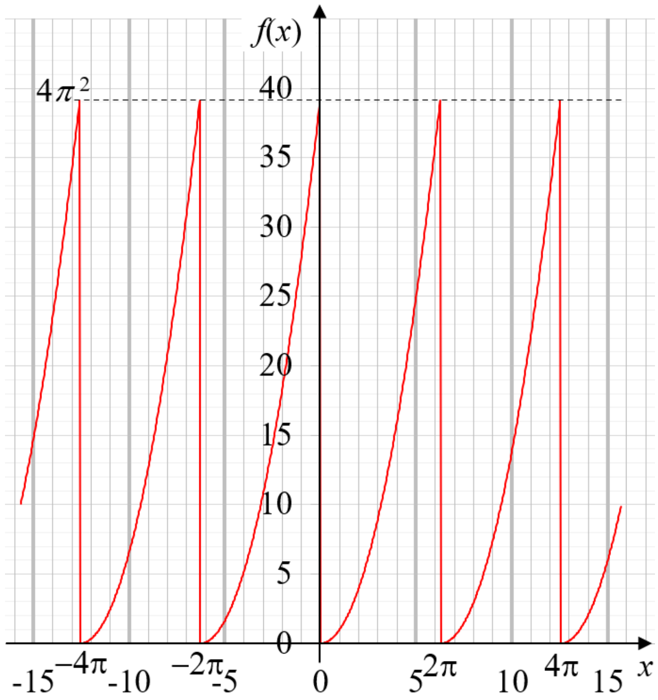
$$= \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}\boldsymbol{T^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2e + 3e^{-2} & e - e^{-2} \\ -6e + 6e^{-2} & 3e - 2e^{-2} \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

問4.

(1)



(2)

周期 2πの関数 $f(x)$に対する複素フーリエ級数は次式の通り表せる：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}. \quad (4-1)$$

まず c_0（直流分）については

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^2, \qquad (4-2)$$

となる。また c_n については

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-jnx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 e^{-jnx}dx, \ (4-3)$$

となる。

問とともに与えた不定積分公式に於いて $a=-n$ として得られる

$$\int x^2 \exp(-jnx)\,dx = \frac{2nx + j(n^2x^2 - 2)}{n^3}\exp(-jnx), \qquad (4-4)$$

を利用すると

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2nx + j(n^2x^2 - 2)}{n^3}\exp(-jnx)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{2n(2\pi) + jn^2(2\pi)^2}{n^3} \exp(-j2n\pi)$$

$$= \frac{2n + j2\pi n^2}{n^3}$$

$$= \frac{2}{n^2} + j\frac{2\pi}{n}, \qquad (4-5)$$

となる。よって

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jnx} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{jnx} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jnx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2} - j\frac{2\pi}{n}\right) e^{-jnx} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2} + j\frac{2\pi}{n}\right) e^{jnx}$$

$$\left(= \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{2}{n^2} - j\frac{2\pi}{n}\right) e^{-jnx} + \left(\frac{2}{n^2} + j\frac{2\pi}{n}\right) e^{jnx}\right\}\right), \qquad (4-6)$$

となる。

(3)

(4-6)式に於いて $x=\pi$ とし、$\sin n\pi=0$ に注意すると

$$f(\pi) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{2}{n^2} - j\frac{2\pi}{n}\right) e^{-jn\pi} + \left(\frac{2}{n^2} + j\frac{2\pi}{n}\right) e^{jn\pi}\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{2}{n^2} - j\frac{2\pi}{n}\right) \cos(-n\pi) + \left(\frac{2}{n^2} + j\frac{2\pi}{n}\right) \cos(n\pi)\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(n\pi)\ , \qquad (4-7)$$

となる。一方与式に $x=\pi$ を与えると π^2 が得られるため、(4-7)式の両辺を 4 で割り $\cos n\pi=(-1)^n$ に注意すると

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

となる。即ち

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12}, \quad (4-8)$$

が導かれる。(4-8)式の左辺は

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{-(-1)^1}{1^2}+\frac{-(-1)^2}{2^2}+\frac{-(-1)^3}{3^2}+\frac{-(-1)^4}{4^2}+\frac{-(-1)^5}{5^2}+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+-\cdots$$

であるため

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+-\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

が成立する。

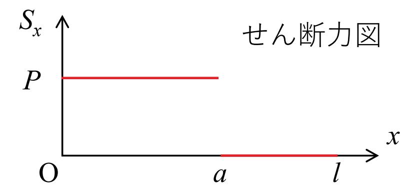
材料力学

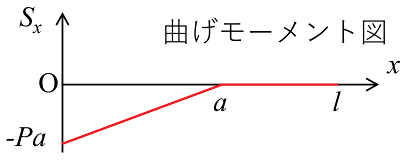
問１解答

$$\sigma_{\mathrm{a}} = \frac{Pb}{Al} \text{ , } \sigma_{\mathrm{b}} = -\frac{Pa}{Al}$$

問２解答

(a)





(b)
AC 間のたわみ角とたわみ

$$i = -\frac{P}{2EI}x^2 + \frac{Pa}{EI}x, \quad y = -\frac{P}{6EI}x^3 + \frac{Pa}{2EI}x^2$$

CB 間のたわみ角とたわみ

$$i = \frac{Pa^2}{2EI}, \quad y = \frac{Pa^2}{2EI}x - \frac{Pa^3}{6EI}$$

(c)

$$y_{\max} = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2 b}{2EI}$$

流体力学・熱力学

問１

（１）層流

（２）$1.13\ \mathrm{m/s}$

（３）$3.32 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$

（４）0.25

（５）297.94 kPa

問２

(a)

$$TdS = dU + pdV \quad ・・・ \quad (1)$$

エンタルピーHの定義式は

$$H = U + pV \quad ・・・(2)$$

(2)式を微分すると次式となる．

$$dH = dU + d(pV) = dU + pdV + Vdp \text{ より } \quad dU = dH - pdV - Vdp \quad ・・・(3)$$

(3)式を(1)式に代入して

$$TdS = dH - Vdp$$

となる．

(b)

絶対仕事　0.60×10^6 J

内部エネルギー　1.4×10^6 J

問３

(a) 0.70

(b) 2.0×10^6 J

(c) 1.4×10^6 J