

数 学

氏 名

受 験
番 号

1

1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。ただし、 $0 < p < 1$ とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において、事象 A がちょうど k 回起こる確率を $P(n, k, p)$ で表す。以下の問に答えよ。

(1) $P(n, k, p)$ を n, k, p を用いて表せ。

(2) $\frac{P(n, k, p)}{P(n, k-1, p)}$ を n, k, p を用いて表せ。ただし $1 \leq k \leq n$ とする。

(3) 整数 k が 0 以上 59 以下の範囲を動くとき、 $P(59, k, \frac{1}{3})$ が最大となる k の値を求めよ。

[解答欄]

$$(1) P(n, k, p) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$(2) \frac{P(n, k, p)}{P(n, k-1, p)} = \frac{{}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}}{{}_n C_{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}}$$

$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p}$$

(3) (2) で $n=59, p=\frac{1}{3}$ とおくと $1 \leq k \leq 59$ のとき

$$\frac{P(59, k, \frac{1}{3})}{P(59, k-1, \frac{1}{3})} = \frac{60-k}{k} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{60}{k} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \dots\dots (*)$$

$$(*) > 1 \Rightarrow P(59, k, \frac{1}{3}) > P(59, k-1, \frac{1}{3})$$

$$(*) = 1 \Rightarrow P(59, k, \frac{1}{3}) = P(59, k-1, \frac{1}{3})$$

$$(*) < 1 \Rightarrow P(59, k, \frac{1}{3}) < P(59, k-1, \frac{1}{3})$$

ここで

$$(*) > 1 \text{ となるのは } k=1, 2, \dots, 19$$

$$(*) = 1 \text{ となるのは } k=20$$

$$0 < (*) < 1 \text{ となるのは } k=21, 22, \dots, 59.$$

ゆえに

$$P(59, 0, \frac{1}{3}) < P(59, 1, \frac{1}{3}) < P(59, 2, \frac{1}{3}) < \dots < P(59, 18, \frac{1}{3})$$

$$< P(59, 19, \frac{1}{3}) = P(59, 20, \frac{1}{3}), \text{ および}$$

$$P(59, 20, \frac{1}{3}) > P(59, 21, \frac{1}{3}) > \dots > P(59, 59, \frac{1}{3}).$$

よって $P(59, k, \frac{1}{3})$ が最大となるのは $k=19, 20$.

得
点

- 2 θ_1 は $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ を満たす定数とし, 数列 $\{\theta_n\}, \{a_n\}$ は次の条件によって定められているとする。

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{2}(2\pi - \theta_n), \quad a_n = \sin \theta_n + 2 \sin \theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問に答えよ。

- (1) n を自然数とすると, 不等式 $\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi$ を証明せよ。
 (2) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を θ_1 を用いて表せ。また, 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。
 (3) n を自然数とすると, 不等式 $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことを証明せよ。また, すべての自然数 n に対して $a_n = a_{n+1}$ が成り立つときの θ_1 の値を求めよ。

[解答欄]

(1) $\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi \dots (*)$ $n=1$ のとき $(*)$ は仮定より成立

$n=k$ のとき $(*)$ が成立, あるいは $\frac{\pi}{2} < \theta_k < \pi$ と仮定する。

漸化式より $\theta_{k+1} = \frac{1}{2}(2\pi - \theta_k)$. よって θ_{k+1} のとり得る範囲は,

$$\frac{1}{2}(2\pi - \pi) < \theta_{k+1} < \frac{1}{2}(2\pi - \frac{\pi}{2}) \quad \text{あるいは} \quad \frac{\pi}{2} < \theta_{k+1} < \frac{3}{4}\pi < \pi$$

よって $n=k+1$ のときにも $(*)$ が成立. 従ってすべての自然数 n に対して $(*)$ は成立.

(2) 漸化式 $\theta_{n+1} = -\frac{1}{2}\theta_n + \pi$ を $\theta_{n+1} - C = -\frac{1}{2}(\theta_n - C)$

と変形した場合, C は $\frac{3}{2}C = \pi$ あるいは $C = \frac{2}{3}\pi$ となる.

$$\text{よって } \theta_n - \frac{2}{3}\pi = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\theta_1 - \frac{2}{3}\pi\right), \quad \theta_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\theta_1 - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{2}{3}\pi.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \frac{2}{3}\pi$. $\sin \theta$ は θ の連続関数なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sin \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n\right) + 2 \sin \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n\right) = \sin \frac{2}{3}\pi + 2 \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

(3) $a_{n+1} - a_n = \sin \theta_{n+1} + 2 \sin \theta_{n+2} - \sin \theta_n - 2 \sin \theta_{n+1} = 2 \sin \theta_{n+2} - \sin \theta_{n+1} - \sin \theta_n$

$$\text{ここで } \begin{cases} \sin \theta_{n+2} = \sin \left(\pi - \frac{\theta_{n+1}}{2}\right) = \sin \frac{\theta_{n+1}}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{4}\right) = \cos \frac{\theta_n}{4}, \\ \sin \theta_{n+1} = \sin \left(\pi - \frac{\theta_n}{2}\right) = \sin \frac{\theta_n}{2} = 2 \sin \frac{\theta_n}{4} \cos \frac{\theta_n}{4}, \\ \sin \theta_n = 2 \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} = 4 \sin \frac{\theta_n}{4} \cos \frac{\theta_n}{4} (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_n}{4}), \end{cases}$$

ゆえに

$$a_{n+1} - a_n = \cos \frac{\theta_n}{4} \left\{ 2 - 2 \sin \frac{\theta_n}{4} - 4 \sin \frac{\theta_n}{4} (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_n}{4}) \right\}$$

$$= 2 \cos \frac{\theta_n}{4} \left(4 \sin^3 \frac{\theta_n}{4} - 3 \sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right) = 2 \cos \frac{\theta_n}{4} \left(\sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right) \left(4 \sin^2 \frac{\theta_n}{4} - 4 \sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right)$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi \text{ より } \cos \frac{\theta_n}{4} > 0, \quad = 2 \cos \frac{\theta_n}{4} \left(\sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right) (2 \sin \frac{\theta_n}{4} - 1)^2$$

$$0 < \sin \frac{\pi}{8} < \sin \frac{\theta_n}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって } a_{n+1} - a_n \geq 0$$

$$\text{また } a_{n+1} = a_n \iff 2 \sin \frac{\theta_n}{4} = 1 \left(\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi \right) \iff \frac{\theta_n}{4} = \frac{\pi}{6} \iff \theta_n = \frac{2}{3}\pi$$

(2) より, これは $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$ と同値.

数 学

氏 名

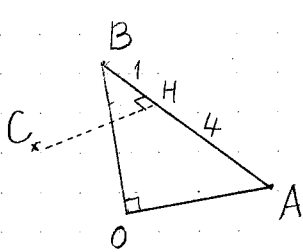
受験
番号

3

原点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 A, B, C があり, $\angle AOB = 90^\circ$ とする。点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき, H は線分 AB を $4:1$ に内分し, $CH = \frac{\sqrt{13}}{5}$ であるとする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1) $\vec{CH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$, および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (3) s, t を実数とすると, $|\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|^2$ を s, t の式で表せ。
- (4) 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないことを示せ。

[解答欄]



$$(1) \vec{OH} = \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} \quad \text{よって}$$

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c}$$

$$(2) \vec{CH} \perp \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \text{ は直交するので}$$

$$\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{よって} \quad \left(\frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \quad \cdots (1)$$

仮定より $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, これを (1) の展開に代入し

$$\frac{4}{5} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{5} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{3}{5} = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\text{他方 } \frac{\sqrt{13}}{5} = |\vec{CH}| \text{ より } \frac{13}{25} = \left| \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right|^2 = \left(\frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right) \cdot \left(\frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right)$$

$$|\vec{c}| = 1 \text{ にも注意して展開すると } \frac{13}{25} = \frac{1+16}{25} - \frac{2}{5}(\vec{a} + 4\vec{b}) \cdot \vec{c} + 1,$$

$$\text{よって } \vec{a} \cdot \vec{c} + 4\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{29}{10} = 0 \quad \cdots (3)$$

$$(2) (3) \text{ から } \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{10}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{7}{10}$$

$$(3) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \text{ を再び用いて}$$

$$|\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|^2 = (\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}) \cdot (\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b})$$

$$= 1 + s^2 + t^2 - 2(s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{c}, \quad (2) \text{ の結果を用いて,}$$

$$= 1 + s^2 + t^2 - \frac{1}{5}s - \frac{7}{5}t$$

$$(4) \text{ 4 点 } O, A, B, C \text{ が同一平面上にある} \Leftrightarrow \text{点 } C \text{ が平面 } OAB \text{ 上にある}$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ となる実数 } s, t \text{ がある}$$

$$\text{が成立する. ところが (3) より } |\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|^2 = \left(s - \frac{1}{10}\right)^2 + \left(t - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$$

したがって $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ となるような実数は存在しない。

よって O, A, B, C は同一平面上にない。

得
点

数 学

氏 名

受 験
番 号

4

以下の問に答えよ。

- (1) 関数 $y = e^x \cos x$ の区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値と最小値を求めよ。
- (2) 定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k\pi}{2n}} \cos \frac{k\pi}{2n}$ を求めよ。

[解答欄]

(1) $y = e^x \cos x$ かつ $y' = e^x (\cos x - \sin x) = e^x \cdot \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$
 $y' = 0$ とする x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) は $x = \frac{\pi}{4}$. 増減表は

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y'	+	0	-
y	1	$\nearrow \boxed{\uparrow} \searrow$	0

$y(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに $x = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{\pi}{2}$ で最小値 0

をとる.

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x)' \, dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$
 $= e^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\cos x)' \, dx = e^{\frac{\pi}{2}} + [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$
 $= e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I$. I を移項して, $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$ $I = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

(3) 区間求積法により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{\pi}{2}(\frac{k}{n})} \cos \frac{\pi}{2}(\frac{k}{n}) = \int_0^1 e^{\frac{\pi}{2}x} \cos \frac{\pi}{2}x \, dx \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\pi}{2}x = t \text{ とおくと } x = \frac{2}{\pi}t, \, dx = \frac{2}{\pi}dt$$

x	0	$\nearrow$	1
t	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

ゆえに

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \cdot \frac{2}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} I = \frac{1}{\pi} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1) \end{aligned}$$

得
点

数 学

氏名

受験
番号

5

楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ と直線 $y = \frac{1}{2}x$ の2つの交点をA, Bとする。ただし、点Aのx座標は点Bのx座標より大きいものとする。 k は0でない定数とし、楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ は、直線 $y = \frac{1}{2}x + k$ と異なる2点P, Qで交わるとする。ただし、点Pのx座標は点Qのx座標より大きいものとする。以下の問に答えよ。

- (1) k の値の範囲を求めよ。
- (2) k が(1)で求めた範囲を動くとき、台形ABQPの面積 S を k を用いて表せ。
- (3) k が(1)で求めた範囲を動くとき、 S の最大値を求めよ。

[解答欄]

(1) $x^2 + 4y^2 = 4$ と $y = \frac{1}{2}x + k$ が

異なる2点で交わるので、 y を消去した式

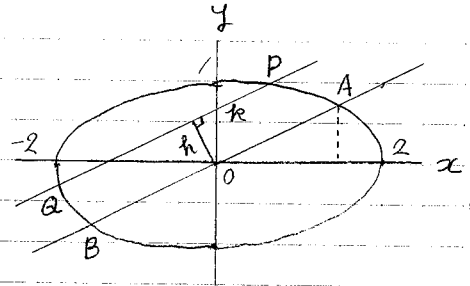
$$x^2 + x^2 + 4kx + 4k^2 = 4 \quad \text{すなわち}$$

$$x^2 + 2kx + 2(k^2 - 1) = 0 \quad \text{①}$$

が異なる2実解をもつ。よって

$$\text{判別式 } \frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 1) = -k^2 + 2 > 0$$

$$k \text{ は } 0 \text{ でないことと合わせ } -\sqrt{2} < k < 0, \quad 0 < k < \sqrt{2}$$



(2) 点A, Bのx座標は①で $k=0$ としたときの解で $x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

直線ABの傾きは $\frac{1}{2}$ であるので $AB = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{10}$

点P, Qのx座標は①より、それぞれ $x = -k + \sqrt{2-k^2}, -k - \sqrt{2-k^2}$

直線PQの傾きも $\frac{1}{2}$ であるので $PQ = 2\sqrt{2-k^2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\sqrt{2-k^2}$

台形ABQPの高さ(図で h)は、 $|k| \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$

したがって $S = (\sqrt{10} + \sqrt{5}\sqrt{2-k^2}) \cdot \frac{|k|}{\sqrt{5}} = (\sqrt{2} + \sqrt{2-k^2}) |k|$

(3) $S(k) = (\sqrt{2} + \sqrt{2-k^2}) |k|$ とおくと $S(-k) = S(k)$ なので、

$0 < k < \sqrt{2}$ で $S(k)$ の最大値を求めればよい(明らかに $S(k) > 0$, $S(0) = 0$)

$0 < k < \sqrt{2}$ のとき $S(k) = (\sqrt{2} + \sqrt{2-k^2}) k$

$S'(k) = \sqrt{2} + \sqrt{2-k^2} - \frac{k^2}{\sqrt{2-k^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-k^2} + 2(1-k^2)}{\sqrt{2-k^2}}$ よって

$0 < k < \sqrt{2}$ のとき $S'(k) = 0 \Leftrightarrow 2-k^2 = 2(1-k^2)^2$ から $k^2 > 1$

整理して $2k^4 - 3k^2 = k^2(2k^2 - 3) = 0$ 。よって $k^2 = \frac{3}{2}$, $k = \sqrt{\frac{3}{2}}$

k	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{2}$	$\left(k^2 = t \text{ とおくと, } S'(k) \text{ の分子 } \sqrt{2}\sqrt{2-t} + 2(1-t) \text{ は } 0 < t < 2 \text{ で単調減少} \right)$
$S(k)$	$2\sqrt{2}$	+	0	
$S(k)$	0	↗	↘	

従って $k = \sqrt{\frac{3}{2}}$ で S は最大値 $(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。

得
点