

数 学

氏 名

受験
番号

1

以下の問に答えよ。

(1) $x = \sqrt{2} - 1$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$, および $x^4 + \frac{1}{x^4}$ の値を求めよ。(2) 和 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ を求めよ。(3) $\sqrt{n^2 + 10n + 20}$ が自然数となるような整数 n をすべて求めよ。

[解答欄]

$$(1) \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \text{ より } x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}, \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 8. \text{ 他方}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \text{ であるから } x^2 + \frac{1}{x^2} = 8 - 2 = 6$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 6^2 = 36. \text{ 他方 } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} \text{ であるから}$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 36 - 2 = 34$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \text{ より}$$

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{100} - 1 = 9$$

$$(3) \sqrt{n^2 + 10n + 20} = k \text{ (自然数とおく)}$$

$$n^2 + 10n + 20 = k^2 \text{ 左辺} = (n+5)^2 - 5 \text{ より}$$

$$(n+5)^2 - k^2 = (n+5+k)(n+5-k) = 5. \dots (A)$$

因子 $n+5+k$, $n+5-k$ はそれぞれ整数であり,
 k は自然数なので $n+5+k > n+5-k$ であるから

(A) を満たす各因子の組合せは

$$(B) \begin{cases} n+5+k=5 \\ n+5-k=1 \end{cases} \text{ または } (C) \begin{cases} n+5+k=-1 \\ n+5-k=-5 \end{cases} \text{ である.}$$

$$(B) \text{ を解いて } k=2, n=-2 \quad (C) \text{ を解いて } k=2, n=-8$$

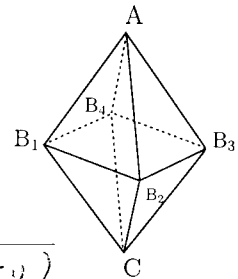
$$\text{ゆえに } n = -2, -8.$$

得
点

2

図のような正八面体 $AB_1B_2B_3B_4C$ において、頂点にいる物体 P は、1 秒ごとに、正八面体の 1 辺をはさんで隣り合う 4 頂点のいずれかに $\frac{1}{4}$ の等確率で移動する。 n は自然数とする。初め頂点 A にいた物体 P が n 秒後に、頂点 A にいる確率を a_n 、頂点 B_1, B_2, B_3, B_4 のいずれかにいる確率を b_n 、頂点 C にいる確率を c_n とする。たとえば、 $a_1 = 0, b_1 = 1, c_1 = 0$ である。以下の問に答えよ。

- (1) a_2, b_2, c_2 を求めよ。
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ それぞれを、 a_n, b_n, c_n の中から必要なものを用いて表せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ。



[解答欄]

$$(1) \quad a_2 = \frac{1}{4} \cdots (B_1 \sim B_4 \text{ からそれぞれ } \frac{1}{4} \text{ の確率で } A \text{ へ移動} \text{ かつ } b_1 = 1 \text{ より})$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \cdots (a_1 = 0, b_1 = 1, \text{ および } B_1 \sim B_4 \text{ からそれぞれ } \frac{1}{2} \text{ の確率で } B_1 \sim B_4 \text{ へ移動})$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \cdots (b_1 = 1 \text{ かつ } B_1 \sim B_4 \text{ からそれぞれ } \frac{1}{4} \text{ の確率で } C \text{ へ移動})$$

$$(2) \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \cdots (B_1 \sim B_4 \text{ からそれぞれ } \frac{1}{4} \text{ の確率で } A \text{ へ移動})$$

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \cdots (A \text{ から必ず } B \text{ へ, } C \text{ から必ず } B \text{ へ移動, } B_1 \sim B_4 \text{ からはそれぞれ } \frac{1}{2} \text{ の確率で } B_1 \sim B_4 \text{ へ移動})$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \cdots (B_1 \sim B_4 \text{ からそれぞれ } \frac{1}{4} \text{ の確率で } C \text{ へ移動})$$

(3) (2) の 3 つの式の左辺どおり、右辺どおりを加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$$

また $a_1 + b_1 + c_1 = 1$ なので、すべての n につき $a_n + b_n + c_n = 1$ 。

(n 秒後には、物体 P は $A, B_1 \sim B_4, C$ のいずれかにいることに注意)

$a_n + c_n = 1 - b_n$ を (2) の第 2 式に代入すると、

$$b_{n+1} = 1 - b_n + \frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2} b_n + 1$$

これを $b_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} (b_n - \alpha)$ と変形した場合、 $\frac{3}{2} \alpha = 1$ より $\alpha = \frac{2}{3}$

$$\text{よって } b_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} (b_n - \frac{2}{3})$$

$$\text{よって } b_n - \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b_1 - \frac{2}{3}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに } b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{また } a_n = \frac{1}{4} b_{n-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3

θ_1 は $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ を満たす定数とし、数列 $\{\theta_n\}, \{a_n\}$ は次の条件によって定められているとする。

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{2}(2\pi - \theta_n), \quad a_n = \sin \theta_n + 2 \sin \theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問に答えよ。

(1) n を自然数とすると、不等式 $\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi$ を証明せよ。

(2) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を θ_1 を用いて表せ。

(3) n を自然数とすると、不等式 $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことを証明せよ。また、すべての自然数 n に対して $a_n = a_{n+1}$ が成り立つときの θ_1 の値を求めよ。

[解答欄]

(1) $\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi \dots (*)$ $n=1$ のとき $(*)$ は仮定より成立

$n=k$ のとき $(*)$ が成立、あなわち $\frac{\pi}{2} < \theta_k < \pi$ と仮定する。

漸化式より $\theta_{k+1} = \frac{1}{2}(2\pi - \theta_k)$ 。よって θ_{k+1} のとり得る範囲は、

$$\frac{1}{2}(2\pi - \pi) < \theta_{k+1} < \frac{1}{2}(2\pi - \frac{\pi}{2}) \quad \text{あなわち} \quad \frac{\pi}{2} < \theta_{k+1} < \frac{3}{4}\pi < \pi$$

よって $n=k+1$ のときにも $(*)$ が成立。従ってすべての自然数 n に対して $(*)$ は成立

(2) 漸化式 $\theta_{n+1} = -\frac{1}{2}\theta_n + \pi$ を $\theta_{n+1} - C = -\frac{1}{2}(\theta_n - C)$

と変形した場合、 C は $\frac{3}{2}C = \pi$ であわち $C = \frac{2}{3}\pi$ となる。

$$\text{よって } \theta_n - \frac{2}{3}\pi = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\theta_1 - \frac{2}{3}\pi\right), \quad \theta_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\theta_1 - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{2}{3}\pi.$$

(3) $a_{n+1} - a_n = \sin \theta_{n+1} + 2 \sin \theta_{n+2} - \sin \theta_n - 2 \sin \theta_{n+1} = 2 \sin \theta_{n+2} - \sin \theta_{n+1} - \sin \theta_n$

ここで $\sin \theta_{n+2} = \sin(\pi - \frac{\theta_{n+1}}{2}) = \sin \frac{\theta_{n+1}}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{4}) = \cos \frac{\theta_n}{4}$,

漸化式より $\sin \theta_{n+1} = \sin(\pi - \frac{\theta_n}{2}) = \sin \frac{\theta_n}{2} = 2 \sin \frac{\theta_n}{4} \cos \frac{\theta_n}{4}$,

$$\sin \theta_n = 2 \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} = 4 \sin \frac{\theta_n}{4} \cos \frac{\theta_n}{4} (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_n}{4}),$$

ゆえに

$$a_{n+1} - a_n = \cos \frac{\theta_n}{4} \left\{ 2 - 2 \sin \frac{\theta_n}{4} - 4 \sin \frac{\theta_n}{4} (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_n}{4}) \right\}$$

$$= 2 \cos \frac{\theta_n}{4} \left(4 \sin^3 \frac{\theta_n}{4} - 3 \sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right) = 2 \cos \frac{\theta_n}{4} \left(\sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right) \left(4 \sin^2 \frac{\theta_n}{4} - 4 \sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right)$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi \text{ より } \cos \frac{\theta_n}{4} > 0, \quad = 2 \cos \frac{\theta_n}{4} \left(\sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right) \left(2 \sin \frac{\theta_n}{4} - 1 \right)^2$$

$$0 < \sin \frac{\pi}{8} < \sin \frac{\theta_n}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって } a_{n+1} - a_n \geq 0$$

$$\text{また } a_{n+1} = a_n \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\theta_n}{4} = 1 \quad \left(\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi \right) \Leftrightarrow \frac{\theta_n}{4} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta_n = \frac{2}{3}\pi$$

(2) より、これは $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$ と同値。

数 学

氏 名

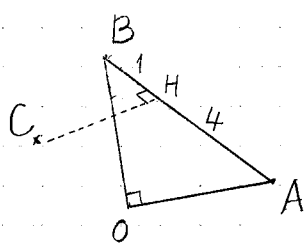
受験
番号

4

原点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 A, B, C があり, $\angle AOB = 90^\circ$ とする。点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき, H は線分 AB を $4:1$ に内分し, $CH = \frac{\sqrt{13}}{5}$ であるとする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく。以下の問に答えよ。

- (1) $\vec{CH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$, および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (3) s, t を実数とすると, $|\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|^2$ を s, t の式で表せ。
- (4) 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないことを示せ。

[解答欄]



$$(1) \vec{OH} = \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} \quad \text{よって}$$

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c}$$

$$(2) \vec{CH} \perp \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \quad \text{は直交するので}$$

$$\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{よって} \quad \left(\frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\text{仮定より} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \text{ゆえに (1) の展開に注意して}$$

$$\frac{4}{5} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{5} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{3}{5} = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\text{他方} \quad \frac{\sqrt{13}}{5} = |\vec{CH}| \quad \text{より} \quad \frac{13}{25} = \left| \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right|^2 = \left(\frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right) \cdot \left(\frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right)$$

$$|\vec{c}| = 1 \quad \text{に注意して展開すると} \quad \frac{13}{25} = \frac{1+16}{25} - \frac{2}{5}(\vec{a} + 4\vec{b}) \cdot \vec{c} + 1,$$

$$\text{よって} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} + 4\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{29}{10} = 0 \quad \cdots (3)$$

$$(2) (3) \text{ から} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{10}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{7}{10}$$

$$(3) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \quad \text{を再び用いて}$$

$$|\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|^2 = (\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}) \cdot (\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b})$$

$$= 1 + s^2 + t^2 - 2(s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{c}, \quad (2) \text{ の結果を用いて,}$$

$$= 1 + s^2 + t^2 - \frac{1}{5}s - \frac{7}{5}t$$

$$(4) \quad 4 \text{ 点 } O, A, B, C \text{ が同一平面上にある} \Leftrightarrow \text{点 } C \text{ が平面 } OAB \text{ 上にある}$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{となる実数 } s, t \text{ が存在する}$$

$$\text{が成立する。よって (3) より} \quad \left| \vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b} \right|^2 = \left(s - \frac{1}{10} \right)^2 + \left(t - \frac{7}{10} \right)^2 + \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{したがって} \quad \vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{となるような実数は存在しない。}$$

$$\text{よって } O, A, B, C \text{ は同一平面上にない。}$$

得
点

数 学

氏 名

受 験
番 号

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので、どちらか1題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

5 以下の問に答えよ。

(1) 関数 $y = e^x \cos x$ の区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値と最小値を求めよ。

(2) 定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k\pi}{2n}} \cos \frac{k\pi}{2n}$ を求めよ。

[解答欄]

(1) $y = e^x \cos x$ かつ $y' = e^x (\cos x - \sin x) = e^x \cdot \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$
 $y' = 0$ とする x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) は $x = \frac{\pi}{4}$. 増減表は

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y'	+	0	-
y	1	$\uparrow$	0

$y(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに $x = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$x = \frac{\pi}{2}$ で最小値 0

をとる.

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x)' \, dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$
 $= e^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\cos x)' \, dx = e^{\frac{\pi}{2}} + [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$
 $= e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I. \quad I$ を移項して, $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \quad I = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

(3) 区分求積法により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{\pi}{2}(\frac{k}{n})} \cos \frac{\pi}{2}(\frac{k}{n}) = \int_0^1 e^{\frac{\pi}{2}x} \cos \frac{\pi}{2}x \, dx \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\pi}{2}x = t \quad \text{と置く} \quad x = \frac{2}{\pi}t, \quad dx = \frac{2}{\pi}dt$$

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

ゆえに

$$\textcircled{1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \cdot \frac{2}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} I = \frac{1}{\pi} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$$

得
点

数 学

氏 名

受験
番号

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので、どちらか1題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

6

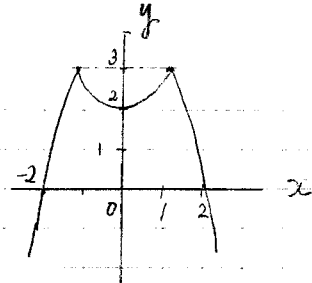
k は $0 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$ を満たす定数とし、 $f(x) = 2k + 1 - |x^2 - k^2|$ とおく。曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(k)$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) $k = 1$ のときの関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
 (2) $S(k)$ を求めよ。
 (3) k が $0 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$ の範囲を動くとき、 $S(k)$ の最大値を求めよ。

[解答欄]

$$(1) k=1 \text{ のとき } f(x) = 3 - |x^2 - 1|$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \dots x \leq -1 \text{ または } 1 \leq x \\ 2 + x^2 & \dots -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$(2) -k \leq x \leq k \text{ のとき}$$

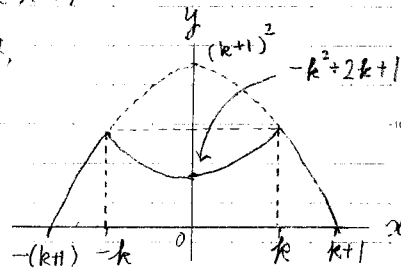
$$f(x) = 2k + 1 - (k^2 - x^2) = x^2 - k^2 + 2k + 1$$

$$\therefore \text{定数項: } -k^2 + 2k + 1 = -(k-1)^2 + 2 \text{ は,}$$

$$0 \leq k \leq 1 + \sqrt{2} \text{ のとき } 0 \text{ 以上.}$$

$$x \leq -k \text{ または } k \leq x \text{ のとき}$$

$$f(x) = 2k + 1 - (x^2 - k^2) = -x^2 + (k+1)^2$$



$f(x)$ と x 軸で囲まれた図形は y 軸について対称な形。

$$S(k) = 2 \left\{ \int_0^k (x^2 - k^2 + 2k + 1) dx + \int_k^{k+1} (-x^2 + (k+1)^2) dx \right\}$$

$$= 2 \left\{ \left[\frac{x^3}{3} + (-k^2 + 2k + 1)x \right]_0^k + \left[-\frac{x^3}{3} + (k+1)^2 x \right]_k^{k+1} \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{k^3}{3} + (-k^2 + 2k + 1)k - \frac{(k+1)^3}{3} + (k+1)^3 + \frac{k^3}{3} - (k+1)^2 k \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{2}{3} k^3 - k^3 + 2k^2 + k + \frac{2}{3} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 - 2k^2 - k \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{-2}{3} k^3 + 2k^2 + 2k + \frac{2}{3} \right\} = \frac{4}{3} (-k^3 + 3k^2 + 3k + 1)$$

$$(3) S'(k) = \frac{4}{3} (-3k^2 + 6k + 3) = -4(k^2 - 2k - 1) = -4\{(k-1)^2 - 2\}$$

$$\therefore 0 \leq k < 1 + \sqrt{2} \text{ のとき } S'(k) > 0$$

$$k \quad | \quad 0 \quad \quad \quad 1 + \sqrt{2}$$

$$S'(k) \quad | \quad \quad \quad + \quad \quad \quad 0$$

$$S(k) \quad | \quad \frac{4}{3} \quad \nearrow \quad S(1 + \sqrt{2})$$

$k = 1 + \sqrt{2}$ で最大値 $S(1 + \sqrt{2})$ をとる。

$$S(k) = \frac{4}{3} \{(k^2 - 2k - 1)(-k) + k^3 + 2k + 1\}$$

$$\begin{array}{r} k^3 - 2k - 1 \\ -k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ \hline -k^3 + 2k^2 + k \\ \hline k^2 + 2k + 1 \end{array}$$

$$\therefore S(1 + \sqrt{2}) = \frac{4}{3} (2 + \sqrt{2})^2 = \frac{4}{3} (6 + 4\sqrt{2}) = \frac{8}{3} (3 + 2\sqrt{2})$$

得
点