

数 学

氏 名

受験
番号

問題 1 は必答問題です。

解答欄には、結論だけでなく、結論を導くまでの議論や計算過程も記述してください。

1

 θ_1 は $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ を満たす定数とし、数列 $\{\theta_n\}, \{a_n\}$ は次の条件によって定められているとする。

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{2}(2\pi - \theta_n), \quad a_n = \sin \theta_n + 2 \sin \theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問に答えよ。

(1) n を自然数とすると、不等式 $\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi$ を証明せよ。(2) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を θ_1 を用いて表せ。(3) n を自然数とすると、不等式 $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことを証明せよ。また、すべての自然数 n に対して $a_n = a_{n+1}$ が成り立つときの θ_1 の値を求めよ。

[解答欄]

(1) $\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi \dots (*)$ $n=1$ のとき $(*)$ は仮定より成立 $n=k$ のとき $(*)$ が成立、おなわち $\frac{\pi}{2} < \theta_k < \pi$ と仮定する。漸化式より $\theta_{k+1} = \frac{1}{2}(2\pi - \theta_k)$ 。よって θ_{k+1} のとり得る範囲は、

$$\frac{1}{2}(2\pi - \pi) < \theta_{k+1} < \frac{1}{2}(2\pi - \frac{\pi}{2}) \quad \text{おなわち} \quad \frac{\pi}{2} < \theta_{k+1} < \frac{3}{4}\pi < \pi$$

よって $n=k+1$ のときにも $(*)$ が成立。従ってすべての自然数 n に対して $(*)$ は成立

$$(2) \text{ 漸化式 } \theta_{n+1} = -\frac{1}{2}\theta_n + \pi \quad \text{を} \quad \theta_{n+1} - c = -\frac{1}{2}(\theta_n - c)$$

と変形した場合、 c は $\frac{3}{2}c = \pi$ おなわち $c = \frac{2}{3}\pi$ となる。

$$\text{よって } \theta_n - \frac{2}{3}\pi = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\theta_1 - \frac{2}{3}\pi\right), \quad \theta_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\theta_1 - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{2}{3}\pi.$$

$$(3) a_{n+1} - a_n = \sin \theta_{n+1} + 2 \sin \theta_{n+2} - \sin \theta_n - 2 \sin \theta_{n+1} = 2 \sin \theta_{n+2} - \sin \theta_{n+1} - \sin \theta_n$$

$$\text{ここで} \quad \begin{cases} \sin \theta_{n+2} = \sin\left(\pi - \frac{\theta_{n+1}}{2}\right) = \sin \frac{\theta_{n+1}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{4}\right) = \cos \frac{\theta_n}{4}, \\ \sin \theta_{n+1} = \sin\left(\pi - \frac{\theta_n}{2}\right) = \sin \frac{\theta_n}{2} = 2 \sin \frac{\theta_n}{4} \cos \frac{\theta_n}{4}, \\ \sin \theta_n = 2 \sin \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} = 4 \sin \frac{\theta_n}{4} \cos \frac{\theta_n}{4} (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_n}{4}), \end{cases}$$

ゆえに

$$a_{n+1} - a_n = \cos \frac{\theta_n}{4} \left\{ 2 - 2 \sin \frac{\theta_n}{4} - 4 \sin \frac{\theta_n}{4} (1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_n}{4}) \right\}$$

$$= 2 \cos \frac{\theta_n}{4} \left(4 \sin^3 \frac{\theta_n}{4} - 3 \sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right) = 2 \cos \frac{\theta_n}{4} \left(\sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right) \left(4 \sin^2 \frac{\theta_n}{4} - 4 \sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right)$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi \text{ より } \cos \frac{\theta_n}{4} > 0, \quad = 2 \cos \frac{\theta_n}{4} \left(\sin \frac{\theta_n}{4} + 1 \right) \left(2 \sin \frac{\theta_n}{4} - 1 \right)^2$$

$$0 < \sin \frac{\pi}{8} < \sin \frac{\theta_n}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって } a_{n+1} - a_n \geq 0$$

$$\text{また } a_{n+1} = a_n \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\theta_n}{4} = 1 \quad \left(\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi \right) \Leftrightarrow \frac{\theta_n}{4} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta_n = \frac{2}{3}\pi$$

(2) より、これは $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$ と同値。得
点

数 学

氏 名

受験
番 号

問題 2 と問題 3 は選択問題です。どちらか 1 題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また、選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。
解答欄には、結論だけでなく、結論を導くまでの議論や計算過程も記述してください。

2

以下の問に答えよ。

- (1) 関数 $y = e^x \cos x$ の区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における増減、および最大値と最小値を調べよ。
 (2) 定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$ を求めよ。
 (3) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k\pi}{2n}} \cos \frac{k\pi}{2n}$ と (2) の定積分 I の関係を述べよ。

[解答欄]

(1) $y = e^x \cos x$ かつ $y' = e^x (\cos x - \sin x) = e^x \cdot \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$
 $y' = 0$ とする x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) は $x = \frac{\pi}{4}$. 増減表は

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y'	+	0	-
y	1	$\nearrow \boxed{\uparrow} \searrow$	0

$y(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに $x = \frac{\pi}{4}$ で最大値 $e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$,
 $x = \frac{\pi}{2}$ で最小値 0
 とする.

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x)' \, dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$
 $= e^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\cos x)' \, dx = e^{\frac{\pi}{2}} + [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$
 $= e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I$. I を移項して, $2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$ $I = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

(3) 区間求積法により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{\pi}{2}(\frac{k}{n})} \cos \frac{\pi}{2}(\frac{k}{n}) = \int_0^1 e^{\frac{\pi}{2}x} \cos \frac{\pi}{2}x \, dx \quad \text{--- (1)}$$

$\frac{\pi}{2}x = t$ とおくと $x = \frac{2}{\pi}t$, $dx = \frac{2}{\pi}dt$

x	0	$\nearrow$	1
t	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

ゆえに $\textcircled{1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \cdot \frac{2}{\pi} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt$
 $= \frac{2}{\pi} I = \frac{1}{\pi} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$

得
点

数 学

氏 名

受 験
番 号

問題 2 と問題 3 は選択問題です。どちらか 1 題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また、選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。
解答欄には、結論だけでなく、結論を導くまでの議論や計算過程も記述してください。

3

k は $0 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$ を満たす定数とし、 $f(x) = 2k + 1 - |x^2 - k^2|$ とおく。関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を $S(k)$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $k = 1$ のときの関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

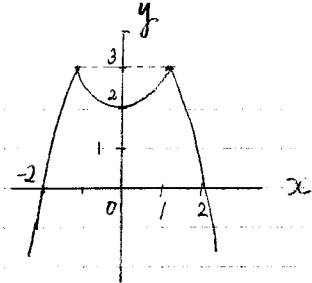
(2) $S(k)$ を求めよ。

(3) k が $0 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$ の範囲を動くとき、 $S(k)$ の最大値を調べよ。

[解答欄]

$$(1) k=1 \text{ のとき } f(x) = 3 - |x^2 - 1|$$

$$\text{よって } f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \dots x \leq -1 \text{ または } 1 \leq x \\ 2 + x^2 & \dots -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$(2) -k \leq x \leq k \text{ のとき}$$

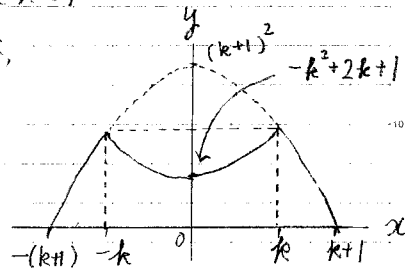
$$f(x) = 2k + 1 - (k^2 - x^2) = x^2 - k^2 + 2k + 1$$

$$\text{ここで定数項: } -k^2 + 2k + 1 = -(k-1)^2 + 2 \text{ は、}$$

$$0 \leq k \leq 1 + \sqrt{2} \text{ のとき } 0 \text{ 以上、}$$

$$x \leq -k \text{ または } k \leq x \text{ のとき}$$

$$f(x) = 2k + 1 - (x^2 - k^2) = -x^2 + (k+1)^2$$



$f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形は y 軸について対称より

$$S(k) = 2 \left\{ \int_0^k (x^2 - k^2 + 2k + 1) dx + \int_k^{k+1} (-x^2 + (k+1)^2) dx \right\}$$

$$= 2 \left\{ \left[\frac{x^3}{3} + (-k^2 + 2k + 1)x \right]_0^k + \left[-\frac{x^3}{3} + (k+1)^2 x \right]_k^{k+1} \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{k^3}{3} + (-k^2 + 2k + 1)k - \frac{(k+1)^3}{3} + (k+1)^3 + \frac{k^3}{3} - (k+1)^2 k \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{2}{3} k^3 - k^3 + 2k^2 + k + \frac{2}{3} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 - 2k^2 - k \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{-2}{3} k^3 + 2k^2 + 2k + \frac{2}{3} \right\} = \frac{4}{3} (-k^3 + 3k^2 + 3k + 1)$$

$$(3) S'(k) = \frac{4}{3} (-3k^2 + 6k + 3) = -4(k^2 - 2k - 1) = -4\{(k-1)^2 - 2\}$$

$$\text{よって } 0 \leq k < 1 + \sqrt{2} \text{ のとき } S'(k) > 0$$

$$k \quad | \quad 0 \quad \quad \quad 1 + \sqrt{2}$$

$$S'(k) \quad | \quad \quad \quad 0$$

$$S(k) \quad | \quad \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad S(1 + \sqrt{2})$$

$k = 1 + \sqrt{2}$ のとき最大値 $S(1 + \sqrt{2})$ をとる。

$$S(k) = \frac{4}{3} \{(k^2 - 2k - 1)(-k) + k^3 + 2k + 1\}$$

$$\begin{array}{r} k^2 - 2k - 1 \\ \times (-k) \\ \hline -k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ -k^3 + 2k^2 + k \\ \hline k^2 + 2k + 1 \end{array}$$

$$\text{よって } S(1 + \sqrt{2}) = \frac{4}{3} (2 + \sqrt{2})^2 = \frac{4}{3} (6 + 4\sqrt{2}) = \frac{8}{3} (3 + 2\sqrt{2})$$

得
点