

数 学 問 題

(理工学部 物質・環境類)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この『数学問題』を開いてはいけません。
2. この中には、2枚の下書用紙と、問題文を含む6枚の解答用紙があります。
3. 試験開始後、直ちに、二つ折りになっているすべての用紙を広げてください。
4. 問題に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出てください。
5. 氏名と受験番号は、問題 5 と問題 6 を含むすべての解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. **解答は各問題の下の解答欄に記入し、裏面は解答に使用しないでください。**

解答用紙の裏面に解答してもその部分は採点しません。

7. 問題 1 から問題 4 までは全て解答してください。

問題 5 (数学Ⅲの内容を含む)と問題 6 (数学Ⅲの内容を含まない)は選択問題です。どちらか1題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。

また、**選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。**「選択しない」と記入しなかった場合や問題 5 と問題 6 の両方を解答した場合は、両方の答案が0点になることがありますので、注意してください。

8. 問題 5 と問題 6 の選択問題の解答用紙を含む6枚の解答用紙のみを回収しますので、この表紙と2枚の下書用紙は持ち帰ってください。

下 書 用 紙 (1)

下 書 用 紙 (2)

数 学

氏 名	
-----	--

受 験 番 号	
------------	--

1

以下の問に答えよ。

- (1) $x = \sqrt{2} - 1$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$, および $x^4 + \frac{1}{x^4}$ の値を求めよ。
- (2) 和 $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$ を求めよ。
- (3) $\sqrt{n^2 + 10n + 20}$ が自然数となるような整数 n をすべて求めよ。

[解答欄]

得 点	
--------	--

こ の 面 は 記 入 不 可

氏 名	
-----	--

理工物質環境 2

受 験 番 号	
------------	--

- 2
- 1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。ただし、 $0 < p < 1$ とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において、事象 A がちょうど k 回起こる確率を $P(n, k, p)$ で表す。以下の間に答えよ。
- (1) $P(n, k, p)$ を n, k, p を用いて表せ。
- (2) $\frac{P(n, k, p)}{P(n, k - 1, p)}$ を n, k, p を用いて表せ。ただし $1 \leq k \leq n$ とする。
- (3) 整数 k が 0 以上 59 以下の範囲を動くとき、 $P\left(59, k, \frac{1}{3}\right)$ が最大となる k の値を求めよ。

[解答欄]

得 点	
--------	--

こ の 面 は 記 入 不 可

氏 名	
-----	--

理工物質環境 3

受 験 番 号	
------------	--

3

θ_1 は $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$ を満たす定数とし，数列 $\{\theta_n\}, \{a_n\}$ は次の条件によって定められているとする。

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{2}(2\pi - \theta_n), \quad a_n = \sin \theta_n + 2 \sin \theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問に答えよ。

- (1) n を自然数とするとき，不等式 $\frac{\pi}{2} < \theta_n < \pi$ を証明せよ。
- (2) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を θ_1 を用いて表せ。
- (3) n を自然数とするとき，不等式 $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことを証明せよ。また，すべての自然数 n に対して $a_n = a_{n+1}$ が成り立つときの θ_1 の値を求めよ。

[解答欄]

得 点	
--------	--

こ の 面 は 記 入 不 可

氏 名	
-----	--

理工物質環境 4

受 験 番 号	
------------	--

- 4
- 原点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 A, B, C があり, $\angle AOB = 90^\circ$ とする。点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき, H は線分 AB を $4:1$ に内分し, $CH = \frac{\sqrt{13}}{5}$ であるとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。以下の問に答えよ。
- (1)

$\overrightarrow{CH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (2)

内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$, および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (3)

s, t を実数とすると, $|\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|^2$ を s, t の式で表せ。
- (4)

4 点 O, A, B, C は同一平面上にないことを示せ。

[解答欄]

得点	
----	--

こ の 面 は 記 入 不 可

数 学

氏 名	
-----	--

受 験 番 号	
------------	--

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので，どちらか 1 題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

5

以下の問に答えよ。

- (1) 関数 $y = e^x \cos x$ の区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値と最小値を求めよ。
- (2) 定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k\pi}{2n}} \cos \frac{k\pi}{2n}$ を求めよ。

[解答欄]

得 点	
--------	--

こ の 面 は 記 入 不 可

数 学

氏 名	
-----	--

受 験 番 号	
------------	--

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので、どちらか1題を選択し、その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

- 6
- k は $0 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$ を満たす定数とし、 $f(x) = 2k + 1 - |x^2 - k^2|$ とおく。曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(k)$ とする。以下の問に答えよ。
- (1) $k = 1$ のときの関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) $S(k)$ を求めよ。
- (3) k が $0 \leq k \leq 1 + \sqrt{2}$ の範囲を動くとき、 $S(k)$ の最大値を求めよ。

[解答欄]

得 点	
--------	--

こ の 面 は 記 入 不 可