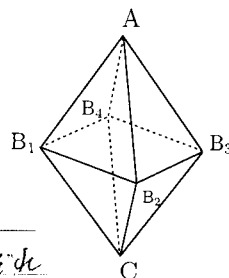


- 1 図のような正八面体 $AB_1B_2B_3B_4C$ において、頂点にいる物体 P は、1 秒を経過するごとに、その点に確率 $\frac{1}{5}$ で留まるか、あるいは正八面体の 1 辺をはさんで隣り合う 4 頂点のいずれかに $\frac{1}{5}$ の等確率で移動する。 n は自然数とする。初め頂点 A にいた物体 P が n 秒後に、頂点 A にいる確率を a_n 、頂点 B_1, B_2, B_3, B_4 のいずれかにいる確率を b_n 、頂点 C にいる確率を c_n とする。たとえば、 $a_1 = \frac{1}{5}$ 、 $b_1 = \frac{4}{5}$ 、 $c_1 = 0$ である。以下の問に答えよ。
- (1) a_{n+1} 、 b_{n+1} 、 c_{n+1} それぞれを、 a_n 、 b_n 、 c_n の中から必要なものを用いて表せ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。



[解答欄]

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n + \frac{1}{5} b_n \cdots (A \text{ で留まっている, または } B_1 \sim B_4 \text{ からそれぞれ } \frac{1}{5} \text{ の確率で } A \text{ へ移動})$$

$$b_{n+1} = \frac{4}{5} a_n + \frac{3}{5} b_n + \frac{4}{5} c_n \cdots (A \text{ から移動するは (確率 } \frac{4}{5}) \text{ 必ず } B_1 \sim B_4 \text{ へ, } C \text{ から移動するは (確率 } \frac{4}{5}) \text{ 必ず } B_1 \sim B_4 \text{ へ, } B_1 \sim B_4 \text{ で動かない (確率 } \frac{1}{5}) \text{ または } B_1 \sim B_4 \text{ の中で移動 (確率 } \frac{2}{5})$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{5} c_n + \frac{1}{5} b_n \cdots (A \rightarrow C \text{ として } a_{n+1} \text{ の場合と同様})$$

(2) (1) の 3 つの式の左辺とあし右辺とあし を加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 1 \text{ より すべての } n \text{ につき}$$

$$a_n + b_n + c_n = 1 \text{ (} n \text{ 秒後, 物体 } P \text{ は } A, B_1 \sim B_4, C \text{ のいずれかにいるのに対応)}$$

$$a_n + c_n = 1 - b_n \text{ を (1) の } 2 \text{ 式の右辺に代入すると}$$

$$b_{n+1} = \frac{4}{5} (1 - b_n) + \frac{3}{5} b_n = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} b_n + \frac{3}{5} b_n = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} b_n$$

$$\text{これを } b_{n+1} - \alpha = \frac{1}{5} (b_n - \alpha) \text{ と変形した場合, } \frac{6}{5} \alpha = \frac{4}{5} \text{ より } \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\text{よって } b_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{5} (b_n - \frac{2}{3}) \text{ より } b_n - \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} (b_1 - \frac{2}{3}) = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \frac{2}{15}$$

$$\text{よって } b_n = \frac{2}{15} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\text{また } a_n + c_n = 1 - b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdots \cdots ①$$

$$(1) \text{ の } 1 \text{ 式 } \text{ と } 3 \text{ 式を引くと } a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{5} (a_n - c_n)$$

$$\text{よって } a_n - c_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} (a_1 - c_1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdots \cdots ②$$

$$① \text{ と } ② \text{ から } a_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\}$$

数 学

氏名

受験
番号

2

以下の問に答えよ。

- (1) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ のとき、不等式 $\frac{a+b+c+d}{4} \geq (abcd)^{\frac{1}{4}}$ が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つための a, b, c, d の必要十分条件を求めよ。
- (2) 等式 $\left(x^2 + y^2 + 2x + 2y + 6 + \frac{25}{x^2 + y^2 + 1}\right)^4 = 64000(x+y)$ が成り立つような正の実数の組 (x, y) をすべて求めよ。

[解答欄]

(1) 相加平均と相乗平均との関係

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{等号成立} \Leftrightarrow a=b) \text{ ともなる.}$$

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \quad (\text{等号成立} \Leftrightarrow a=b \text{ かつ } c=d)$$

$$\geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \quad (\text{等号成立} \Leftrightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{cd})$$

$$= (abcd)^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{ゆえに } \frac{a+b+c+d}{4} \geq (abcd)^{\frac{1}{4}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{等号成立} \Leftrightarrow a=b, c=d \text{ かつ} \\ \sqrt{ab} = \sqrt{cd} \end{array} \right\} (*)$$

$$(*) \text{ は, } \begin{cases} a > 0, b > 0 \text{ かつ } a=b \text{ より } \sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a \\ c > 0, d > 0 \text{ かつ } c=d \text{ より } \sqrt{cd} = \sqrt{c^2} = c \end{cases} \text{ より } a=b=c=d \text{ と同値}$$

$$(2) \left(x^2 + y^2 + 2x + 2y + 6 + \frac{25}{x^2 + y^2 + 1}\right)^4$$

$$= \left(\underbrace{x^2 + y^2 + 1}_a + \underbrace{\frac{25}{x^2 + y^2 + 1}}_b + \underbrace{2x + 2y + 5}_c\right)^4 \geq 4^4 (abcd) \quad (1)$$

$$= 4^4 \cdot 25 \cdot 2(x+y) \cdot 5 = 64000(x+y)$$

等号成立時の (x, y) を求める解にあり、 $a=b=c=d$ より

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{25}{x^2 + y^2 + 1} = 2(x+y) = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 = 5 = 2(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4, \quad x+y = \frac{5}{2}$$

$$\text{お2式より } y = \frac{5}{2} - x, \text{ お1式に代入し, } 2x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0 \text{ より } x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{4}$$

$$\text{したがって } (x, y) = \left(\frac{5+\sqrt{7}}{4}, \frac{5-\sqrt{7}}{4}\right), \left(\frac{5-\sqrt{7}}{4}, \frac{5+\sqrt{7}}{4}\right)$$

得
点

数 学

氏 名

受験
番号

- 3 複素数 α を方程式 $z^3 = 1$ の 1 でない解とする。数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は各項が実数で、 $(2+\alpha)^n = a_n + \alpha b_n$ をみたすとする。以下の間に答えよ。

- (1) 実数 p, q, r, s が $p + q\alpha = r + s\alpha$ を満たすとき、 $p = r$ かつ $q = s$ が成り立つことを示せ。
- (2) a_3, b_3 を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の各項は整数となることを示せ。
- (4) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答欄]

$$(1) \alpha^3 = 1 \text{ かつ } \alpha \neq 1 \text{ より } \alpha^3 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \text{ より}$$

$$\alpha \text{ は } \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \text{ の解. したがって } \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$p + q\alpha = r + s\alpha \text{ かつ } q \neq s \text{ とする. したがって } \frac{p-r}{s-q} = \alpha \text{ ①}$$

p, q, r, s は実数より ① の左辺は実数、右辺は虚数となり矛盾より $q = s$.

$$\text{再び } p + q\alpha = r + s\alpha \text{ より } p = r$$

$$(2) (2+\alpha)^3 = a_3 + \alpha b_3 \text{ ②}$$

$$\text{ここで左辺は } 8 + 12\alpha + 6\alpha^2 + \alpha^3 = 9 + 12\alpha + 6(-\alpha - 1) = 3 + 6\alpha$$

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は各項が実数であること、および ② と (1) から $a_3 = 3, b_3 = 6$.

$$(3) 2 + \alpha = a_1 + \alpha b_1 \text{ と (1) の結果から } a_1 = 2, b_1 = 1 \text{ といずれも整数.}$$

a_k, b_k は整数であると仮定する.

$$\begin{aligned} a_{k+1} + \alpha b_{k+1} &= (2+\alpha)(a_k + \alpha b_k) = (2+\alpha)a_k + (2\alpha + \alpha^2)b_k \\ &= (2+\alpha)a_k + (\alpha - 1)b_k = 2a_k - b_k + \alpha(a_k + b_k) \end{aligned}$$

$\{a_n\}, \{b_n\}$ の各項が実数であること、(1) より

$$\begin{cases} a_{k+1} = 2a_k - b_k \\ b_{k+1} = a_k + b_k \end{cases} \text{ したがって } a_{k+1}, b_{k+1} \text{ も整数である.}$$

したがってすべての自然数 n につき a_n, b_n は整数となる.

$$(4) (2+\alpha)^n = a_n + \alpha b_n \text{ に } \alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \text{ をそれぞれ代入し}$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)^n = a_n + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)b_n \text{ ③ } \left(\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)^n = a_n + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)b_n \text{ ④}$$

$$\text{③}-\text{④} \text{ から } a_n \text{ を消去し } \left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)^n = \sqrt{3}i b_n$$

$$\text{よって } b_n = \frac{-i}{\sqrt{3}} \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)^n \right\}, a_n = \left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)^n - \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)b_n \text{ より}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}} \left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}} \left(\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

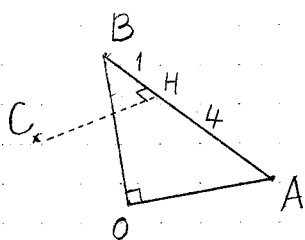
得
点

4

原点 O を中心とする半径 1 の球面上に 3 点 A, B, C があり, $\angle AOB = 90^\circ$ とする。点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき, H は線分 AB を $4:1$ に内分し, $CH = \frac{\sqrt{13}}{5}$ であるとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。以下の間に答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$, および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (2) s, t を実数とすると, $|\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|^2$ を s, t の式で表せ。
- (3) 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないことを示せ。

[解答欄]



$$(1) \quad \overrightarrow{OH} = \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} \quad \text{よって}$$

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} \quad \text{は直交するので}$$

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{よって} \quad \left(\frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\text{仮定より} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \text{ゆえに (1) の展開に注意して}$$

$$\frac{4}{5} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{5} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{3}{5} = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\text{他方} \quad \frac{\sqrt{13}}{5} = |\overrightarrow{CH}| \quad \text{より} \quad \frac{13}{25} = \left| \frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right|^2 = \left(\frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right) \cdot \left(\frac{\vec{a} + 4\vec{b}}{5} - \vec{c} \right)$$

$$|\vec{c}| = 1 \quad \text{に注意して展開すると} \quad \frac{13}{25} = \frac{1+16}{25} - \frac{2}{5}(\vec{a} + 4\vec{b}) \cdot \vec{c} + 1,$$

$$\text{よって} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} + 4\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{29}{10} = 0 \quad \cdots (3)$$

$$(2) \quad (3) \quad \text{より} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{10}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{7}{10}$$

$$(2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \quad \text{を再び用いて}$$

$$|\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|^2 = (\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}) \cdot (\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b})$$

$$= 1 + s^2 + t^2 - 2(s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{c}, \quad (1) \text{ の結果を用いて,}$$

$$= 1 + s^2 + t^2 - \frac{1}{5}s - \frac{7}{5}t$$

$$(3) \quad 4 \text{ 点 } O, A, B, C \text{ が同一平面上にある} \Leftrightarrow \text{点 } C \text{ が平面 } OAB \text{ 上にある}$$

$$\Leftrightarrow \vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{となる実数 } s, t \text{ が存在}$$

$$\text{が成立する. ところが (2) より} \quad |\vec{c} - s\vec{a} - t\vec{b}|^2 = \left(s - \frac{1}{10}\right)^2 + \left(t - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{したがって} \quad \vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{となるような実数は存在しない.}$$

$$\text{よって } O, A, B, C \text{ は同一平面上にない.}$$

数 学

氏 名

受験
番号

5

楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ と直線 $y = \frac{1}{2}x$ の2つの交点を A, B とする。ただし、点 A の x 座標は点 B の x 座標より大きいものとする。 k は 0 でない定数とし、楕円 $x^2 + 4y^2 = 4$ は、直線 $y = \frac{1}{2}x + k$ と異なる2点 P, Q で交わるとする。ただし、点 P の x 座標は点 Q の x 座標より大きいものとする。以下の問に答えよ。

- (1) k の値の範囲を求めよ。
- (2) k が (1) で求めた範囲を動くとき、台形 ABQP の面積 S を k を用いて表せ。
- (3) k が (1) で求めた範囲を動くとき、 S の最大値を求めよ。

[解答欄]

(1) $x^2 + 4y^2 = 4$ と $y = \frac{1}{2}x + k$ が

異なる2点で交わるので、 y を消去した式

$$x^2 + x^2 + 4kx + 4k^2 = 4 \quad \text{すなわち}$$

$$x^2 + 2kx + 2(k^2 - 1) = 0 \quad \text{①}$$

が異なる2実解をもつ。よって

$$\text{判別式 } \frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 1) = -k^2 + 2 > 0$$

$$k \text{ は } 0 \text{ でないことと合わせ } -\sqrt{2} < k < 0, \quad 0 < k < \sqrt{2}$$

(2) 点 A, B の x 座標は、①で $k=0$ としたときの解で $x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

直線 AB の傾きは $\frac{1}{2}$ であるので $AB = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{10}$

点 P, Q の x 座標は①より、それぞれ $x = -k + \sqrt{2-k^2}, -k - \sqrt{2-k^2}$

直線 PQ の傾きも $\frac{1}{2}$ であるので $PQ = 2\sqrt{2-k^2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\sqrt{2-k^2}$

台形 ABQP の高さ (図で h) は、 $|k| \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\text{したがって } S = (\sqrt{10} + \sqrt{5}\sqrt{2-k^2}) \frac{|k|}{\sqrt{5}} = (\sqrt{2} + \sqrt{2-k^2}) |k|$$

(3) $S(k) = (\sqrt{2} + \sqrt{2-k^2}) |k|$ とおくと、 $S(-k) = S(k)$ なので、

$0 < k < \sqrt{2}$ で $S(k)$ の最大値を求めればよい (明らかに $S(k) > 0$, $S(0) = 0$)

$0 < k < \sqrt{2}$ のとき $S(k) = (\sqrt{2} + \sqrt{2-k^2}) k$

$$S'(k) = \sqrt{2} + \sqrt{2-k^2} - \frac{k^2}{\sqrt{2-k^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-k^2} + 2(1-k^2)}{\sqrt{2-k^2}} \quad \text{よって}$$

$0 < k < \sqrt{2}$ のとき $S'(k) = 0 \Leftrightarrow 2-k^2 = 2(1-k^2)^2$ から $k^2 > 1$

整理して $2k^4 - 3k^2 = k^2(2k^2 - 3) = 0$. よって $k^2 = \frac{3}{2}$, $k = \sqrt{\frac{3}{2}}$

k	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{2}$	$\left(k^2 = t \text{ とおくと, } S'(k) \text{ の分子} \right.$
$S'(k)$	$2\sqrt{2}$	+	0	$\left. \sqrt{2}\sqrt{2-t} + 2(1-t) \text{ は } 0 < t < 2 \text{ で単調減少} \right)$
$S(k)$	0	$\nearrow$	$\searrow$	従って

$k = \sqrt{\frac{3}{2}}$ で S は最大値 $(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}) \sqrt{\frac{3}{2}}$
 $= \frac{3}{2} \sqrt{3}$ をとる。

得
点