

問 1 (A)

(a)

$$Y = Y_{RL} + Y_C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega \left(C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

(b)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

(c)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

問 1 (B)

$$R = \frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2 LC - 1}}$$

$$\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

問 2

(a) 無限大、無限大、ゼロ、等しく、仮想短絡(もしくは、イマジナリショート)

(b) 出力の一部がオペアンプの反転入力端子(一)に接続されているため、仮想短絡(イマジナリショート)が成り立っている。よって A 点の電圧は入力電圧 v_{in} と等しくなる。

(c) 理想オペアンプであるから、抵抗 R_2 を流れる電流 i_2 は、オペアンプの反転入力端子(一)側には分流しない。よって電流 i_2 は全て抵抗 R_1 を流れる電流 i_1 となる。すなわち、 $i_1 = i_2$ である。

(d) $i_1 = v_{in}/R_1$

$$v_{out} = R_1 i_1 + R_2 i_2 = (R_1 + R_2) i_1 = (R_1 + R_2) v_{in}/R_1$$

よって電圧増幅率は、

$$v_{out}/v_{in} = 1 + R_2/R_1$$

問 3.

(a) $i = v_{in}/R$

(b) $v_{out} = -i/j\omega C$

(c) 小問(a)の結果と、小問(b)の結果より、電圧増幅率は、 $v_{out}/v_{in} = -1/j\omega CR = j \cdot 1/\omega CR$ となる。

上式は、 $|v_{out}/v_{in}| = 1/\omega CR$ となるので、周波数に反比例した振幅特性となる。

また上式は虚部のみの式であるから、位相特性は、周波数に関わらず、位相が 90° 進む。

解答例

(問 1) MKSA では $A \cdot s/m^2$

(問 2) $\sigma \Delta x \Delta y$

(問 3)

$$\frac{\sigma \Delta x \Delta y}{4\pi\epsilon_0} \frac{(X-x, Y-y, Z)}{[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

または、点 A から P へ向かう向きで $\frac{\sigma \Delta x \Delta y}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2}$

(問 4)

$$\int_{-L}^L \int_{-L}^L \frac{\sigma dx dy}{4\pi\epsilon_0} \frac{(X-x, Y-y, Z)}{[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

(問 5) 対称性より、電場の向きは、面に垂直で、面から遠ざかる向き。ガウスの法則積分形の一般形は $\frac{Q}{\epsilon_0} =$

$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ である。ガウス面 S を底面積 T 、高さ $2D$ の円筒表面とする。この円筒を、底面が無限平面と平行になるように、かつ、2つの円筒底面が、 $z = \pm D$ の高さに位置するように設置する。向きの考察より円筒の側面では電場が側面と垂直。よって側面では $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ となり面積分には寄与しない。一方、円筒内の電荷量は $T\sigma$ だから $\frac{T\sigma}{\epsilon_0} =$

$\int_{上底面} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{下底面} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ 。 $z = \pm D$ の2つの底面では、対称性から電場の大きさは等しく、向きは底面と垂直で

外向き $d\vec{S}$ と平行。したがって $\frac{T\sigma}{\epsilon_0} = 2|\vec{E}|T$ 。以上より $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ となり、無限平面からの距離によらない一定値。

(問 6) 電位の定義は、線積分 $V(P) = -\int_{z=0}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 。点 P が $z > 0$ の空間にいるから、電場は $\vec{E} = (0, 0, |\vec{E}|)$ 。

$$d\vec{l} = (dx, dy, dz) \text{ との内積をとると } V(P) = -\int_{z=0}^P |\vec{E}| dz = -|\vec{E}| \int_0^Z dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} Z$$

(注) 電場 \times 距離と暗記しただけでは負符号は出てこない。線積分は怪しくても、仕事 (内積) との比例から場の向きと変位の向きとの余弦で符号が決まることを理解していれば正解が作れる。

(問 7) 対称性と導体 (金属) の性質より、電場は無限平面に垂直で z 軸の正から負の向き。さらに導体の性質より、導体平面では等電位 (0)。点 P の電荷が点 B(X, Y, 0) に作る電場は z 軸に平行ゆえ、合計電場の向きがそれと平行になるためには、点 P' の座標は (X, Y, b) の形が必要。点 B が等電位になる条件は $\frac{q}{Z} + \frac{q'}{|b|} = 0$ 。左辺第一項は

正だから、 $q' < 0$ が必要。 xy 平面上の点は $(x, y, 0)$ と書け、この点の電位 0 の条件は

$$\frac{q}{[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{q'}{[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + b^2]^{\frac{1}{2}}} = 0。第二項を移項して二乗して変形すると$$

$[(X-x)^2 + (Y-y)^2](q^2 - (q')^2) = Z^2(q')^2 - b^2q^2$ 右辺は定数なので、 $q^2 - (q')^2 \neq 0$ の場合、任意の x, y に対し右辺を定数にすることはできず、等式を成り立たせるために $q^2 - (q')^2 = 0$ が必要。ゆえに $q' = -q$ 。これを右辺に代入すると $b = \pm Z$ 。複号の正は点 P が点 P' と一致し、その点の合計電荷が 0 となり、全空間で電場がゼロになり不適。よって $b = -Z$ で座標は (X, Y, -Z)。このとき、 xy 平面上の任意の点で、合計電位は $\frac{q}{[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}}} -$

$$\frac{q}{[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}}} = 0 \text{ と境界条件を満たし、題意を満たす。}$$

解答例

問2

(1) ⑥

(2) それぞれ以下の通り。

(A) 面積分 $\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi RB$

(B) 面積分 $\int_S \mu_0 \vec{i} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 I$

(3) (A)と(B)を等値すると

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{2\pi \times 1} = 2 \times 10^{-7} \text{ T}$$

(4) 力は以下の通り。

$$\vec{f} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

向きは③。(平行電流は引き合う。)

(5) ビオ・サバルの法則を使って求める。円筒座標系を採用し、電流方向をz方向で正の向き、図の⑥を θ 方向で正の向きと定義する。

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz \vec{e}_z \times (R\vec{e}_r - z\vec{e}_z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{R dz \vec{e}_\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Fig. 2A に示すように、

$$z = R \tan \phi$$

となる角度 ϕ を使って変数変換する。このとき

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\tan^{-1}(\frac{L}{R})}^{\tan^{-1}(\frac{L}{R})} \frac{R \frac{R}{\cos^2 \phi} d\phi \vec{e}_\theta}{\left(\frac{R^2}{\cos^2 \phi}\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{e}_\theta \int_{-\tan^{-1}(\frac{L}{R})}^{\tan^{-1}(\frac{L}{R})} \cos \phi d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{e}_\theta [\sin \phi]_{-\tan^{-1}(\frac{L}{R})}^{\tan^{-1}(\frac{L}{R})} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{e}_\theta \left(\frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} - \frac{-L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

よって

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}}$$

(6) 正方形コイルの中心は、(5)の B_1 において $R = L$ とし、4辺のつくる磁場の向きは同じなので、4倍すればよい。

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \frac{L}{\sqrt{L^2 + L^2}} \times 4 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi L}$$

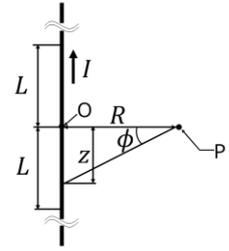


Fig. 2A

機械力学・制御工学

問 1 . (必答問題)

(a)

$$k' = 2k$$

(b)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k'x - c \frac{dx}{dt}$$

(c)

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k'}{m}}$$

(d)

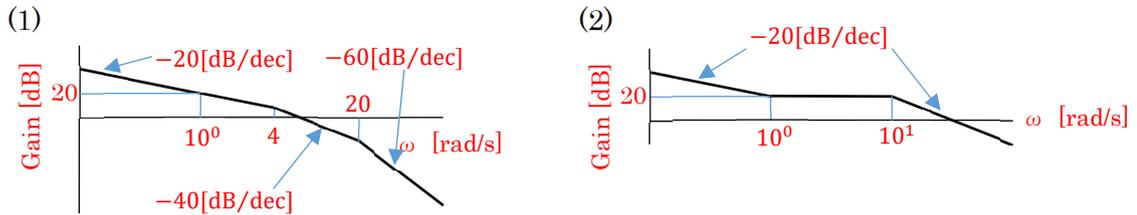
$$x = 3 \cos \sqrt{\frac{k'}{m}} t$$

問 2 . (選択問題 : 問 2 または問 4)

$$\frac{c}{2\sqrt{mk}} \geq 1$$

問 3. (必答問題)

(a)



(b)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(1 + G_1 G_2) G_3 G_4}{1 + H G_2 G_3 + G_3 G_4}$$

(c)

$$Y_1(s) = \frac{G_1(R_1 - G_3 G_4 R_2)}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}, \quad Y_2(s) = \frac{G_3(R_2 - G_1 G_2 R_1)}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

問 4. (選択問題：問 2 または問 4)

(a)

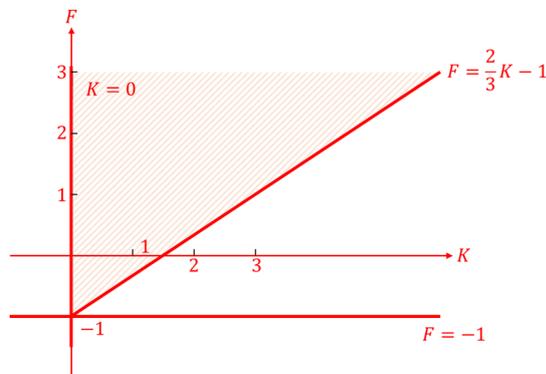
$$G_1(s) = \frac{1}{1+2s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{1+s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s}$$

(b)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{2s^3 + 3s^2 + (F+1)s + K}$$

(c)

図の網掛けの領域 ($K=0, F=2K/3 - 1$ の直線上は含まない)



電気・機械数学

問 1 .

(1)

$$F(s) = \frac{c_1 e^{c_3}}{s - c_2} + \frac{c_4}{s}$$

(2)

$$f(t) = -e^{-2t}$$

問 2 .

(1)

$$E[X] = a$$

$$V[X] = 2b$$

(2)

$$a < X \leq a + z_1 \sqrt{2b}$$

問 3 .

(1)

オイラーの公式より $\exp(j\theta) = \cos \theta + j \sin \theta$ (1)

$\theta = x + y$ とすると $\exp(j(x + y)) = \cos(x + y) + j \sin(x + y)$ (2)

(2)式の左辺に対して指数関数の積の公式を適用すると

$\exp(j(x + y)) = \exp(jx) \exp(jy)$... (3)

が得られ、(3)式の右辺に対してオイラーの公式を適用すると

$$\begin{aligned} & \exp(jx) \exp(jy) \\ &= (\cos x + j \sin x)(\cos y + j \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + j(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \quad \dots (4) \end{aligned}$$

となる。(2)式の右辺と(4)式の実部・虚部を比較すると、加法定理が導かれる。

(2)

1) $\text{rot } \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$

2) $\nabla \phi = 2y\vec{i} + 2x\vec{j}.$

(3)

$x=1, y=2, z=3$

問4.

(1)

固有値 : 1, 6 (前者、後者をそれぞれ λ_1, λ_2 とする)

各固有値 λ_1, λ_2 に対応する規格化固有ベクトル :

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos \frac{(2m-1)\pi}{2} x$$

問1.

	せん断力図 Shear force diagram	曲げモーメント図 Bending moment diagram
(a)	⑨	⑦
(b)	①	⑥
(c)	②	⑫

問2.

(a) $\varepsilon_1 = \frac{W_1}{3AE}$

(b) $W_1 = \frac{1}{2}W, W_2 = \frac{1}{3}W, W_3 = \frac{1}{6}W$

(c) $Wb - \frac{1}{3}W \cdot a - \frac{1}{6}W \cdot 2a = 0$

(d) $b = \frac{2}{3}a$

流体力学

問 1 (Q1)

(a)	$V_2 = \sqrt{2gH}$
(b)	$V_1 = \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gH}$
(c)	$p_1 = p_a + \rho_1 g H \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$

問 2 (Q2)

(a)	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$ $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
(b)	$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 \left[\left(\frac{y}{H} \right)^2 - \frac{y}{H} \right] + (U_2 - U_1) \frac{y}{H} + U_1$
(c)	$\frac{\partial p}{\partial x} = 4\mu \frac{U_2}{H^2}$

熱力学

問 3

(a)

絶対仕事 2.1×10^2 J

工業仕事 2.1×10^2 J

(b)

0.9×10^2 J

(c)

0.2

問 4

(a)

$$mRT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

(b)

$$mR \ln \frac{p_1}{p_2}$$

(c)

100%