（別紙）

| | |
|---|---|
| **タイトル** | 2025 年度 一般選抜（前期日程）<br>共同教育学部（自然科学系）<br>小論文（自然科学系）数学 問題 |
| **評価のポイント** | 次のような点を重視した。<br>• 与えられた条件から結論を導く過程を筋道立てて考えることができる。<br>• 高校数学の知識・技能による正確な推論ができる。<br>• 解決の過程を分かりやすい形で説明できる。 |

# 数　　学

| 氏名 | |
|---|---|

| 受験番号 | |
|---|---|

問題 $\boxed{1}$ は必答問題です。

解答欄には，結論だけでなく，結論を導くまでの議論や計算過程も記述してください。

$\boxed{1}$ $a$ を正の定数とする．以下の問に答えよ。

(1) 不等式 $|-5x+3| \leqq 2a$ を解け。

(2) (1) において $a=4$ のとき，すなわち，不等式 $|-5x+3| \leqq 8$ を満たす整数 $x$ の個数を調べよ。

(3) 不等式 $|-5x+3| \leqq 2a$ を満たす整数 $x$ がちょうど 6 個存在するような $a$ の値の範囲を求めよ。

[ 略解]

(1)

(i) $-5x+3 \geqq 0$ の場合，すなわち $x \leqq \dfrac{3}{5}$ のとき，不等式は $-5x+3 \leqq 2a$ より $x \geqq \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5}a$ となる。したがって

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5}a \leqq x \leqq \frac{3}{5} \quad \cdots (\mathrm{A})$$

(ii) $-5x+3 < 0$ の場合，すなわち $x > \dfrac{3}{5}$ のとき，不等式は $5x-3 \leqq 2a$ より $x \leqq \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}a$ となる。したがって

$$\frac{3}{5} < x \leqq \frac{3}{5} + \frac{2}{5}a \quad \cdots (\mathrm{B})$$

求める解は (A) と (B) を合わせた範囲

$$\underline{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}a \leqq x \leqq \frac{3}{5} + \frac{2}{5}a}$$

である。

(2) $a=4$ を (1) で求めた解に代入すると

$$\frac{3}{5} - \frac{8}{5} \leqq x \leqq \frac{3}{5} + \frac{8}{5}$$

したがって

$$-1 \leqq x \leqq \frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}$$

である。これを満たす整数 $x$ は $-1$，0，1，2 の<u>4 個</u>である。

(3) (1) で求めた範囲は $\dfrac{3}{5}$ が中心なので 6 個の整数解は $-2$，　$-1$，　0，　1，　2，　3 である。この 6 個をちょうど含む $a$ の最小値は $-2 \geqq \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5}a$ より $a \geqq \dfrac{13}{2}$ である。

最大値は $\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}a < 4$ より $a < \dfrac{17}{2}$ である。よって $a$ の範囲は

$$\underline{\frac{13}{2} \leqq a < \frac{17}{2}}$$

| 得点 | |
|---|---|

# 数　　　学

| 氏 名 | |
|---|---|

| 受 験 番 号 | |
|---|---|

問題 $\boxed{2}$ と問題 $\boxed{3}$ は選択問題です。どちらか **1** 題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また，選択しなかった問題の解答欄に 「選択しない」 と記入してください。
解答欄には，結論だけでなく，結論を導くまでの議論や計算過程も記述してください。

$\boxed{2}$ 　以下の問に答えよ。

(1) 関数 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は用いてもよい。

(2) $k$ を定数とする。曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ と傾き $k$ の直線 $y=kx$ の共有点の個数を調べよ.

[ 略解 ]

(1) $f'(x)=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$ 　$f'(x)=0 \iff x=\sqrt{e}$ 　$f''(x)=\dfrac{6\log x-5}{x^4}$ 　$f''(x)=0 \iff x=e^{\frac{5}{6}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\cdot\frac{1}{x}=0\cdot 0=0$ 　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^2}=-\infty$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{e}$ | $\cdots$ | $e^{\frac{5}{6}}$ | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | | | $0$ |

したがって，$x=\sqrt{e}$ のとき極大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。


(2) $\dfrac{\log x}{x}-kx=x\left(\dfrac{\log x}{x^2}-k\right)$ となるので，真数の条件より $x>0$ で $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^2}=-\infty$ あることに注意すると，(1) より，共有点の個数は

$$\begin{cases} k>\dfrac{1}{2e} \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ k=\dfrac{1}{2e} \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ 0<k<\dfrac{1}{2e} \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ k\leqq 0 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \end{cases}$$

| 得 点 | |
|---|---|

# 数　　学

| 氏 名 | |
|---|---|

| 受 験 番 号 | |
|---|---|

問題 $\boxed{2}$ と問題 $\boxed{3}$ は選択問題です。どちらか **1** 題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また，選択しなかった問題の解答欄に 「選択しない」 と記入してください。
解答欄には，結論だけでなく，結論を導くまでの議論や計算過程も記述してください。

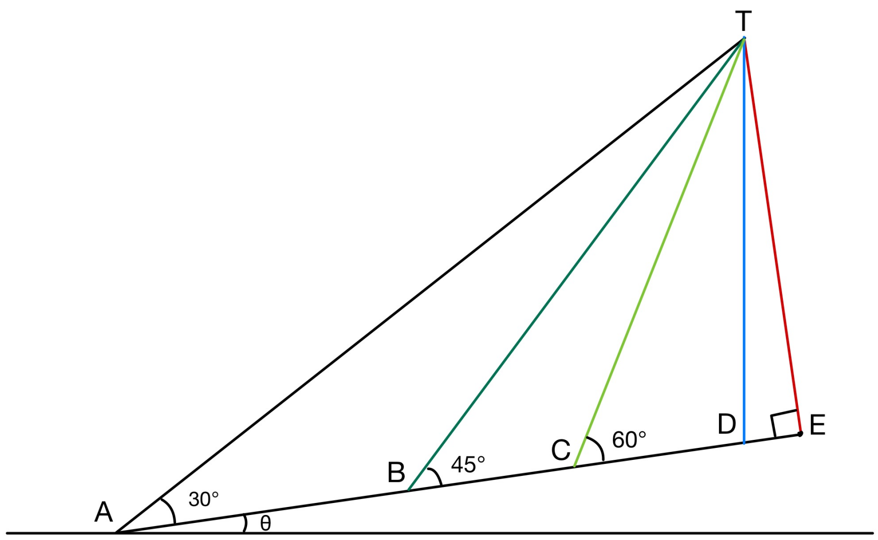
$\boxed{3}$ 　傾斜角一定のまっすぐな登り坂の先に塔が水平方向に対し垂直に立っている。坂の途中のある地点 A から塔の根元から頂上までの見上げる角度を測ると $30^\circ$ であった。そこから，塔に向かって登り坂を進み続け，途中で 2 度，塔の根元から頂上までの見上げる角度を測ると，1 度目が $45^\circ$，2 度目が $60^\circ$ であった。

以下の問に答えよ。ただし，目線の高さは考えないものとし，長さの単位は m（メートル）を用いる。

(1) A の地点から 1 度目の観測点までの距離を $a$ m，1 度目の観測点と 2 度目の観測点の距離を $b$ m とするとき，$\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ。

(2) A の地点から 1 度目の観測点までの距離は $100(\sqrt{3}-1)$ m で 2 度目の観測地点から塔の根元までの距離は $25\sqrt{3}$ m であった。塔の高さは何 m か。また，この登り坂の傾斜角を $\theta$ としたときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

[ 略解 ]




(1) 　上の図のように，最初の地点を A，1 度目の観測点を B，2 度目の観測点を C，塔の根元を D とし，塔の頂上を T とする。また、塔の頂上から坂道へ垂線 TE を下ろす。△AET と △TEC は相似であり，TE : AE = CE : TE = $1:\sqrt{3}$，したがって，AE : CE = 3 : 1 である。また，△ETB は直角二等辺三角形であるから TE = BE となる。
したがって $a:b = \mathrm{AB}:\mathrm{BC} = (3-\sqrt{3}):(\sqrt{3}-1)$ となる。ゆえに

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $\mathrm{AB} = 100(\sqrt{3}-1)$ より，$\mathrm{AE} = 100\sqrt{3}$，$\mathrm{TE} = 100$，$\mathrm{TC} = \dfrac{200}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{CE} = \dfrac{100}{\sqrt{3}}$ となる。したがって，
$\mathrm{DE} = \mathrm{CE} - \mathrm{CD} = \dfrac{100}{\sqrt{3}} - 25\sqrt{3} = \dfrac{25}{\sqrt{3}}$ となる。△TDE は直角三角形であるから

$$\mathrm{TD} = \sqrt{(\mathrm{TE})^2 + (\mathrm{TE})^2} = \sqrt{100^2 + \frac{25^2}{3}} = 25\sqrt{16+\frac{1}{3}} = 25\cdot\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{175}{\sqrt{3}}$$

したがって塔の高さは $\dfrac{175}{\sqrt{3}}$ m である。
$\theta = \angle\mathrm{DTE}$ であるから，$\sin\theta$ の値は

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{TD}} = \frac{\sqrt{3}}{175}\cdot\frac{25}{\sqrt{3}} = \frac{1}{7}$$

| 得 点 | |
|---|---|