理工物質環境 1

氏名	

受験番号	

数　　学

1　n を自然数とする。整数の組 (x, y) で表される座標平面上の点で，次の条件を満たすものの個数をそれぞれ求めよ。

(1) 3 点 $(0,0)$, $(n,0)$, $(0,2n)$ を頂点とする三角形の辺上または内部にある。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} y \leqq n^2 \\ y \geqq \dfrac{x^2}{4} \end{cases}$ で表される領域に含まれ，かつ $x \geqq 0$ を満たす。

[略解]

(1)　直線 $x = n - k$ $(0 \leqq k \leqq n)$ 上の条件を満たす整数の組 (x, y) の個数は，$2k + 1$ 個である．したがって総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2 \cdot \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) = (n+1)^2.$$

(2)　直線 $x = k$ $(0 \leqq k \leqq 2n)$ 上の条件を満たす整数の組 (x, y) の個数を調べる．

- k が偶数，すなわち $k = 2l$ $(0 \leqq l \leqq n)$ のとき，$x = 2l$ と $y = \dfrac{1}{4}x^2$ との交点は $(2l, l^2)$ なので，直線 $x = 2l$ 上にある条件を満たす整数の組 (x, y) の個数は $n^2 - l^2 + 1$ 個.
- k が奇数，すなわち $k = 2l - 1$ $(1 \leqq l \leqq n)$ のとき，$x = 2l - 1$ と $y = \dfrac{1}{4}x^2$ との交点は $(2l - 1,\ l^2 - l + \frac{1}{4})$ なので，直線 $x = 2l - 1$ 上にある条件を満たす整数の組 (x, y) の個数は $n^2 - l^2 + l$ 個.

したがって求める整数の組 (x, y) の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n}(n^2 - l^2 + 1) + \sum_{l=1}^{n}(n^2 - l^2 + l) &= n^2 + 1 + \sum_{l=1}^{n}(2n^2 - 2l^2 + l + 1) \\ &= n^2 + 1 + 2n^3 - 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{4n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{6} + 1 \end{aligned}$$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

2　a を正の定数とする。以下の問に答えよ。

(1) 不等式 $|-5x+3| \leqq 2a$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2) (1) において $a=4$ のとき，すなわち，不等式 $|-5x+3| \leqq 8$ を満たす整数 x の個数を求めよ。

(3) 不等式 $|-5x+3| \leqq 2a$ を満たす整数 x がちょうど 6 個存在するような a の値の範囲を求めよ。

[略解]

(1)

(i) $-5x+3 \geqq 0$ の場合，すなわち $x \leqq \dfrac{3}{5}$ のとき，不等式は $-5x+3 \leqq 2a$ より $x \geqq \dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{5}a$ となる。したがって

$$\frac{3}{5}-\frac{2}{5}a \leqq x \leqq \frac{3}{5} \quad \cdots(\mathrm{A})$$

(ii) $-5x+3<0$ の場合，すなわち $x>\dfrac{3}{5}$ のとき，不等式は $5x-3 \leqq 2a$ より $x \leqq \dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}a$ となる。したがって

$$\frac{3}{5}<x \leqq \frac{3}{5}+\frac{2}{5}a \quad \cdots(\mathrm{B})$$

求める解は (A) と (B) を合わせた範囲

$$\underline{\frac{3}{5}-\frac{2}{5}a \leqq x \leqq \frac{3}{5}+\frac{2}{5}a}$$

である。

(2) $a=4$ を (1) で求めた解に代入すると

$$\frac{3}{5}-\frac{8}{5} \leqq x \leqq \frac{3}{5}+\frac{8}{5}$$

したがって

$$-1 \leqq x \leqq \frac{11}{5}=2+\frac{1}{5}$$

である。これを満たす整数 x は $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ の$\underline{4\text{ 個}}$である。

(3) (1) で求めた範囲は $\dfrac{3}{5}$ が中心なので 6 個の整数解は $-2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3$ である。この 6 個をちょうど含む a の最小値は $-2 \geqq \dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{5}a$ より $a \geqq \dfrac{13}{2}$ である。

最大値は $\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}a<4$ より $a<\dfrac{17}{2}$ である。よって a の範囲は

$$\underline{\frac{13}{2} \leqq a<\frac{17}{2}}$$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

3　数列 $\{a_n\}$ は次の条件によって定められている。

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + 1}{2}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問に答えよ。

(1) すべての n について，$0 < a_n < 1$ となることを示せ。

(2) すべての n について，$a_n < a_{n+1}$ となることを示せ。

(3) $a_n = \cos\theta_n$ となる θ_n $\left(0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

[略解]

(1)　数学的帰納法で示す。

$0 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} = a_1 < 1$ である。

$0 < a_n < 1$ と仮定すると，$0 < \sqrt{\dfrac{a_n + 1}{2}} = a_{n+1} < \sqrt{\dfrac{1+1}{2}} = 1$ となり，$0 < a_{n+1} < 1$ である。
したがって，数学的帰納法より，すべての自然数 n で $0 < a_n < 1$ が成り立つ。

(2)　$0 < a_n < 1$ であるから $a_n^2 < a_n < 1$ であることに注意して

$$a_{n+1}^2 = \frac{a_n + 1}{2} > \frac{a_n^2 + a_n^2}{2} = a_n^2$$

となる。したがって $a_n < a_{n+1}$ となる。

(3)　$a_n = \cos\theta_n$ とすると，

$$a_{n+1}^2 = \frac{a_n + 1}{2} = \frac{\cos^2\theta_n + 1}{2} = \cos^2\frac{\theta_n}{2}$$

となり，$0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると $a_{n+1} = \cos\dfrac{\theta_n}{2}$ である。したがって $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ となる。
$a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$ であるから $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$ である。以上より，$\{\theta_n\}$ は初項 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\theta_n = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

4　座標空間内の 3 点 A，B，C の位置ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は互いに垂直で，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=t\ (t>0)$ とする。3 点 A，B，C を通る平面を α とするとき，以下の問に答えよ。

(1) 原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2) 線分 AB の中点を M とする。点 H が線分 CM を内分する点であることを示し，CH : HM を t を用いて表せ。

[略解]

(1)　点 H は平面 α 上の点であるから $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 k,l がある。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+l\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

である。よって，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を使って

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-k-l)\,\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}$$

となることがわかる。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は平面 α 上の直線と直交するので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\left((1-k-l)\,\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0,\quad\left((1-k-l)\,\vec{a}+k\vec{b}+l\vec{c}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$$

また $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=t,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ を用いると

$$k-(1-k-l)=0,\quad t^2l-(1-k-l)=0$$

k,l について解くと，$k=\dfrac{t^2}{1+2t^2},\ l=\dfrac{1}{1+2t^2}$ となる。また $1-k-l=\dfrac{t^2}{1+2t^2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{t^2}{1+2t^2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{1+2t^2}\vec{c}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ である。(1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{2t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{1}{1+2t^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\dfrac{2t^2}{1+2t^2}+\dfrac{1}{1+2t^2}=1$ なので，これは H が CM を $2t^2:1$ に内分することを意味する。したがって

$$\mathrm{CH}:\mathrm{HM}=2t^2:1$$

である。

得点	

理工物質環境 5

氏名	

受験番号	

数　　学

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので，どちらか１題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

5　以下の問に答えよ。

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ の増減を調べて極値を求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ を求めよ。

(3) k は定数とする。$y=\dfrac{\log x}{x}$ が表す曲線 C と $y=kx$ が表す直線 l が $y>0$ の範囲でただ 1 つの共有点をもつとき，曲線 C，直線 l と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

[略解]

(1) $f'(x)=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$　　$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

したがって，$x=\sqrt{e}$ のとき極大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。

(2) $I=\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ とおくと

$$I=\int (\log x)'\log x\,dx=(\log x)^2-\int \frac{\log x}{x}\,dx=(\log x)^2-I$$

したがって $I=\dfrac{(\log x)^2}{2}+C$ （C は積分定数）

(3) $\dfrac{\log x}{x}-kx=x\left(\dfrac{\log x}{x^2}-k\right)$ となるので，真数の条件より $x>0$ で $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^2}=-\infty$ あることに注意すると，(1) より，$y>0$ の範囲でただ 1 つの共有点をもつのは $k=\dfrac{1}{2e}$ のときで，共有点は $x=\sqrt{e}$ のときである。また，このとき $x>0$ で $\dfrac{\log x}{x}-kx\leqq 0$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{x}{2e}\,dx+\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{x}{2e}-\frac{\log x}{x}\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4e}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{4e}-\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{4e}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{4e}=\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので，どちらか１題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

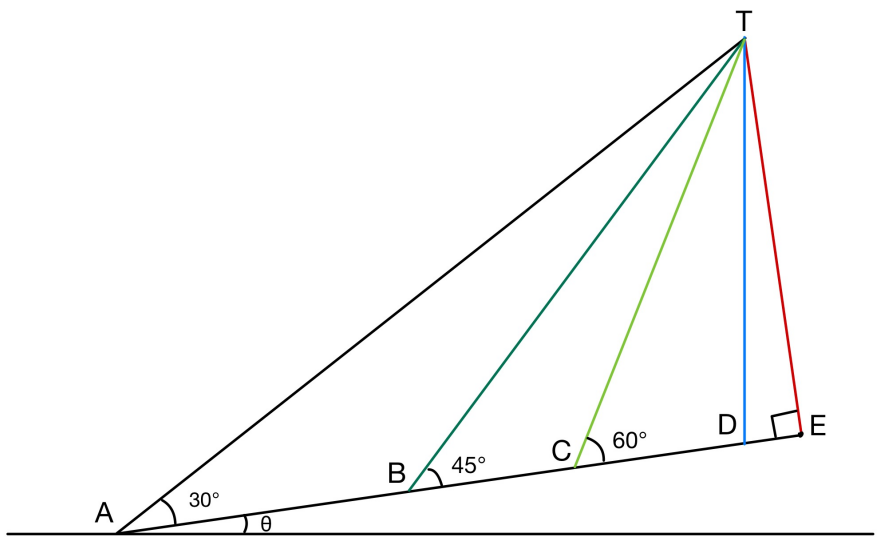
6 傾斜角一定のまっすぐな登り坂の先に塔が水平方向に対し垂直に立っている。坂の途中のある地点 A で塔の根元から頂上までの見上げる角度を測ると 30° であった。A から塔に向かって登り坂を進み続け，途中で 2 度，塔の根元から頂上までの見上げる角度を測ると，1 度目が 45°，2 度目が 60° であった。

以下の問に答えよ。ただし，目線の高さは考えないものとし，長さの単位は m（メートル）を用いる。

(1) A の地点から 1 度目の観測点までの距離を a m，1 度目の観測点と 2 度目の観測点の距離を b m とするとき，$\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ。

(2) A の地点から 1 度目の観測点までの距離は $100(\sqrt{3}-1)$ m で 2 度目の観測地点から塔の根元までの距離は $25\sqrt{3}$ m であった。塔の高さは何 m か。また，この登り坂の傾斜角を θ としたときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

[略解]



(1)　上の図のように，最初の地点を A，１度目の観測点を B，２度目の観測点を C，塔の根元を D とし，塔の頂上を T とする。また、塔の頂上から坂道へ垂線 TE を下ろす。△AET と △TEC は相似であり，$\mathrm{TE}:\mathrm{AE}=\mathrm{CE}:\mathrm{TE}=1:\sqrt{3}$，したがって，$\mathrm{AE}:\mathrm{CE}=3:1$ である。また，△ETB は直角二等辺三角形であるから $\mathrm{TE}=\mathrm{BE}$ となる。
したがって $a:b=\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=(3-\sqrt{3}):(\sqrt{3}-1)$ となる。ゆえに

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $\mathrm{AB}=100(\sqrt{3}-1)$ より，$\mathrm{AE}=100\sqrt{3}$，$\mathrm{TE}=100$，$\mathrm{TC}=\dfrac{200}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{CE}=\dfrac{100}{\sqrt{3}}$ となる。したがって，
$\mathrm{DE}=\mathrm{CE}-\mathrm{CD}=\dfrac{100}{\sqrt{3}}-25\sqrt{3}=\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ となる。△TDE は直角三角形であるから

$$\mathrm{TD}=\sqrt{(\mathrm{TE})^2+(\mathrm{TE})^2}=\sqrt{100^2+\frac{25^2}{3}}=25\sqrt{16+\frac{1}{3}}=25\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{175}{\sqrt{3}}$$

したがって塔の高さは $\dfrac{175}{\sqrt{3}}$ m である。
$\theta=\angle\mathrm{DTE}$ であるから，$\sin\theta$ の値は

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{TD}}=\frac{\sqrt{3}}{175}\cdot\frac{25}{\sqrt{3}}=\frac{1}{7}$$

得点	