

氏 名	
-----	--

理工電子機械 1	
受 験 番 号	

1 n を自然数とする。整数の組 (x, y) で表される座標平面上の点で、次の条件を満たすものの個数をそれぞれ求めよ。

(1) 3 点 $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(0, 2n)$ を頂点とする三角形の辺上または内部にある。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} y \leq n^2 \\ y \geq \frac{x^2}{4} \end{cases}$ で表される領域に含まれ、かつ $x \geq 0$ を満たす。

[略解]

(1) 直線 $x = n - k$ ($0 \leq k \leq n$) 上の条件を満たす整数の組 (x, y) の個数は、 $2k + 1$ 個である。したがって総数は

$$\sum_{k=0}^n (2k + 1) = 2 \cdot \frac{(n + 1)n}{2} + (n + 1) = (n + 1)^2.$$

(2) 直線 $x = k$ ($0 \leq k \leq 2n$) 上の条件を満たす整数の組 (x, y) の個数を調べる。

- k が偶数, すなわち $k = 2l$ ($0 \leq l \leq n$) のとき, $x = 2l$ と $y = \frac{1}{4}x^2$ との交点は $(2l, l^2)$ なので, 直線 $x = 2l$ 上にある条件を満たす整数の組 (x, y) の個数は $n^2 - l^2 + 1$ 個.
- k が奇数, すなわち $k = 2l - 1$ ($1 \leq l \leq n$) のとき, $x = 2l - 1$ と $y = \frac{1}{4}x^2$ との交点は $(2l - 1, l^2 - l + \frac{1}{4})$ なので, 直線 $x = 2l - 1$ 上にある条件を満たす整数の組 (x, y) の個数は $n^2 - l^2 + l$ 個.

したがって求める整数の組 (x, y) の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n (n^2 - l^2 + 1) + \sum_{l=1}^n (n^2 - l^2 + l) &= n^2 + 1 + \sum_{l=1}^n (2n^2 - 2l^2 + l + 1) \\ &= n^2 + 1 + 2n^3 - 2 \cdot \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{n(n + 1)}{2} + n \\ &= \frac{4n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{6} + 1 \end{aligned}$$

得 点	
--------	--

数 学

氏 名	
-----	--

受 験 番 号	
------------	--

2 a を正の定数とする。以下の問に答えよ。

- (1) 不等式 $|-5x + 3| \leq 2a$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (2) (1) において $a = 4$ のとき、すなわち、不等式 $|-5x + 3| \leq 8$ を満たす整数 x の個数を求めよ。
- (3) 不等式 $|-5x + 3| \leq 2a$ を満たす整数 x がちょうど 6 個存在するような a の値の範囲を求めよ。

[略解]

- (1)
- (i) $-5x + 3 \geq 0$ の場合、すなわち $x \leq \frac{3}{5}$ のとき、不等式は $-5x + 3 \leq 2a$ より $x \geq \frac{3}{5} - \frac{2}{5}a$ となる。したがって

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5}a \leq x \leq \frac{3}{5} \quad \cdots (A)$$

- (ii) $-5x + 3 < 0$ の場合、すなわち $x > \frac{3}{5}$ のとき、不等式は $5x - 3 \leq 2a$ より $x \leq \frac{3}{5} + \frac{2}{5}a$ となる。したがって

$$\frac{3}{5} < x \leq \frac{3}{5} + \frac{2}{5}a \quad \cdots (B)$$

求める解は (A) と (B) を合わせた範囲

$$\underline{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}a \leq x \leq \frac{3}{5} + \frac{2}{5}a}$$

である。

- (2) $a = 4$ を (1) で求めた解に代入すると

$$\frac{3}{5} - \frac{8}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} + \frac{8}{5}$$

したがって

$$-1 \leq x \leq \frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}$$

である。これを満たす整数 x は $-1, 0, 1, 2$ の 4 個 である。

- (3) (1) で求めた範囲は $\frac{3}{5}$ が中心なので 6 個の整数解は $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ である。この 6 個をちょうど含む a の最小値は $-2 \geq \frac{3}{5} - \frac{2}{5}a$ より $a \geq \frac{13}{2}$ である。

最大値は $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}a < 4$ より $a < \frac{17}{2}$ である。よって a の範囲は

$$\underline{\frac{13}{2} \leq a < \frac{17}{2}}$$

得 点	
--------	--

数 学

氏 名	
-----	--

受 験 番 号	
------------	--

3

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx$

(3) $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

[略解]

(1) $t = \sqrt{x+1}$ とおくと

$$x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt$$

また, x と t の対応は次のよになる。

x	0	→	1
t	1	→	$\sqrt{2}$

よって

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$$

(2) $x = \sqrt{2} \sin \theta$ とおくと, x と θ の対応は

x	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{4}$

また, $\cos \theta > 0$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) であるから

$$dx = \sqrt{2} \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{2-x^2} = \sqrt{2(1-\sin^2 \theta)} = \sqrt{2} \cos \theta$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (t^2 - 1) dt \quad (t = \cos \theta) \\ &= 2\sqrt{2} \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2} - 5}{3} \end{aligned}$$

(3) $x = \tan \theta$ とおくと $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ x と θ の対応は

x	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{4}$

また, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta \cdot \cos^3 \theta \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta - \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (t = \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1+t}{1-t} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \log(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

得
点

数 学

氏 名	
-----	--

受 験 番 号	
------------	--

- 4
- 座標空間内の3点 A, B, C の位置ベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ は互いに垂直で, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = t$ ($t > 0$) とする。3点 A, B, C を通る平面を α とするとき, 以下の間に答えよ。
- (1) 原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および t を用いて表せ。
- (2) 線分 AB の中点を M とする。点 H が線分 CM を内分する点であることを示し, CH : HM を t を用いて表せ。

[略解]

- (1) 点 H は平面 α 上の点であるから $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}$ となる実数 k, l がある。したがって

$$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + l(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$

である。よって, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を使って

$$\overrightarrow{OH} = (1 - k - l)\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}$$

となることがわかる。 $\overrightarrow{OH}$ は平面 α 上の直線と直交するので, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ であるから

$$\left((1 - k - l)\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0, \quad \left((1 - k - l)\vec{a} + k\vec{b} + l\vec{c}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

また $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = t$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ を用いると

$$k - (1 - k - l) = 0, \quad t^2l - (1 - k - l) = 0$$

k, l について解くと, $k = \frac{t^2}{1 + 2t^2}$, $l = \frac{1}{1 + 2t^2}$ となる。また $1 - k - l = \frac{t^2}{1 + 2t^2}$ であるから

$$\overrightarrow{OH} = \frac{t^2}{1 + 2t^2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{1 + 2t^2}\vec{c}$$

- (2) $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ である。(1) より

$$\overrightarrow{OH} = \frac{2t^2}{1 + t^2}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{1 + 2t^2}\overrightarrow{OC}$$

$\frac{2t^2}{1 + 2t^2} + \frac{1}{1 + 2t^2} = 1$ なので, これは H が CM を $2t^2 : 1$ に内分することを意味する。したがって

$$CH : HM = 2t^2 : 1$$

である。

得 点	
--------	--

氏 名	
-----	--

理工電子機械 5	
受 験 番 号	

5 以下の間に答えよ。

- (1) $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ の増減を調べて極値を求めよ。
- (2) 不定積分 $\int \frac{\log x}{x} dx$ を求めよ。
- (3) k は定数とする。 $y = \frac{\log x}{x}$ が表す曲線 C と $y = kx$ が表す直線 l が $y > 0$ の範囲でただ 1 つの共有点をもつとき、曲線 C 、直線 l と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

[略解]

(1) $f'(x) = \frac{1 - 2 \log x}{x^3} \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

x	0	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	極大	↘

したがって、 $x = \sqrt{e}$ のとき極大値 $\frac{1}{2e}$ をとる。

(2) $I = \int \frac{\log x}{x} dx$ とおくと

$$I = \int (\log x)' \log x \, dx = (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x} dx = (\log x)^2 - I$$

したがって $I = \frac{(\log x)^2}{2} + C$ (C は積分定数)

(3) $\frac{\log x}{x} - kx = x \left(\frac{\log x}{x^2} - k \right)$ となるので、真数の条件より $x > 0$ で $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{x^2} = -\infty$ あることに注意すると、(1) より、 $y > 0$ の範囲でただ 1 つの共有点をもつのは $k = \frac{1}{2e}$ のときで、共有点は $x = \sqrt{e}$ のときである。また、このとき $x > 0$ で $\frac{\log x}{x} - kx \leq 0$ であるから、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{x}{2e} dx + \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x}{2e} - \frac{\log x}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4e} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{4e} - \frac{(\log x)^2}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{4e} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{4e} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

得点	
----	--