

氏 名	
-----	--

医 1	
受 験 番 号	

1

n を自然数とする。整数の組 (x, y) で表される座標平面上の点で、次の条件を満たすものの個数をそれぞれ求めよ。

(1) 3 点 $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(0, 2n)$ を頂点とする三角形の辺上または内部にある。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} y \leq n^2 \\ y \geq \frac{x^2}{4} \end{cases}$ で表される領域に含まれ、かつ $x \geq 0$ を満たす。

[略解]

(1) 直線 $x = n - k$ ($0 \leq k \leq n$) 上の条件を満たす整数の組 (x, y) の個数は、 $2k + 1$ 個である。したがって総数は

$$\sum_{k=0}^n (2k + 1) = 2 \cdot \frac{(n + 1)n}{2} + (n + 1) = (n + 1)^2.$$

(2) 直線 $x = k$ ($0 \leq k \leq 2n$) 上の条件を満たす整数の組 (x, y) の個数を調べる。

- k が偶数, すなわち $k = 2l$ ($0 \leq l \leq n$) のとき, $x = 2l$ と $y = \frac{1}{4}x^2$ との交点は $(2l, l^2)$ なので, 直線 $x = 2l$ 上にある条件を満たす整数の組 (x, y) の個数は $n^2 - l^2 + 1$ 個.
- k が奇数, すなわち $k = 2l - 1$ ($1 \leq l \leq n$) のとき, $x = 2l - 1$ と $y = \frac{1}{4}x^2$ との交点は $(2l - 1, l^2 - l + \frac{1}{4})$ なので, 直線 $x = 2l - 1$ 上にある条件を満たす整数の組 (x, y) の個数は $n^2 - l^2 + l$ 個.

したがって求める整数の組 (x, y) の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n (n^2 - l^2 + 1) + \sum_{l=1}^n (n^2 - l^2 + l) &= n^2 + 1 + \sum_{l=1}^n (2n^2 - 2l^2 + l + 1) \\ &= n^2 + 1 + 2n^3 - 2 \cdot \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{n(n + 1)}{2} + n \\ &= \frac{4n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{6} + 1 \end{aligned}$$

得 点	
--------	--

数 学

氏 名	
-----	--

医 2	
受 験 番 号	

2 自然数 n に対して、 $a(n) = n^2 + 2$ 、 $b(n) = n^3 + 45n^2 + 2n + 765$ とおき、 $a(n)$ と $b(n)$ の最大公約数を $d(n)$ とおく。
以下の問に答えよ。

- (1) $a(n)$ が 5 の倍数でないことを示せ。
- (2) n が自然数全体を動くときの $d(n)$ の最大値 d_0 を求めよ。また、 $d(n) = d_0$ となる自然数 n のなかで最小のものを求めよ。
- (3) $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} a(n) + 2 \log_9 b(n) + (m-1) \log_{\frac{1}{3}} 5$ が自然数となる自然数の組 (m, n) がただ 1 組存在することを示せ。

[略解]

- (1) 自然数 n は 整数 k, r により $n = 5k + r$ ($-2 \leq r \leq 2$) と表される。この表示により、

$$a(n) = (5k + r)^2 + 2 = 25k^2 + 10kr + r^2 + 2 = 5 \cdot (5k^2 + 2kr) + r^2 + 2.$$

- (i) $r = 0$ のとき、5 で割ると余りは $r^2 + 2 = 2$
- (ii) $r = \pm 1$ のとき、5 で割ると余りは $r^2 + 2 = 3$
- (iii) $r = \pm 2$ のとき、5 で割ると余りは $r^2 + 2 = 6$ より、1 となる。

以上より $a(n)$ は 5 の倍数ではない。

- (2) $b(n) = (n^2 + 2)(n + 45) + 675 = a(n)(n + 45) + 5^2 \cdot 3^3$ より、 $a(n)$ と $b(n)$ の最大公約数 $d(n)$ は $a(n)$ と $5^2 \cdot 3^3$ の最大公約数と等しい。(1) より、 $a(n)$ は 5 の倍数ではないので、 $d(n)$ は 3^3 の約数である。 $a(5) = 5^2 + 2 = 27$ となり最大である。よって $d_0 = 27$ 。 n が 4 以下のとき、 $a(n) < 27$ なので、 $n = 5$ が最小である。

- (3) m, n を自然数として、 $A = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} a(n) + 2 \log_9 b(n) + (m-1) \log_{\frac{1}{3}} 5$ とおく。底を 3 にそろえると、

$$A = -\log_3 a(n) + \log_3 b(n) - (m-1) \log_3 5 = \log_3 \frac{b(n)}{5^{m-1}a(n)} \quad \dots\dots (*)$$

$a(5) = 27$ および $b(5) = 3^4 \cdot 5^2$ に注意すると、 $(m, n) = (3, 5)$ のとき、 $A = \log_3 \frac{3^4 \cdot 5^2}{5^2 \cdot 3^3} = \log_3 3 = 1$ となるので A は自然数である。

$(m, n) = (m_0, n_0)$ のとき A が自然数だと仮定し、 $(m_0, n_0) = (3, 5)$ であることを示す。 $A = \log_3 3^A$ に注意すると、(*) より

$$b(n_0) = 3^A 5^{m_0-1} a(n_0) \quad \dots\dots (**)$$

が成り立つ。したがって $b(n_0)$ は $a(n_0)$ の倍数である。よって $d(n_0) = a(n_0)$ となる。(2) で確認した通り、 $d(n_0)$ は 27 の約数でなければならない。よって、 $a(1) = 3$ 、 $a(2) = 6$ 、 $a(3) = 11$ 、 $a(4) = 18$ 、 $a(5) = 27$ であるから n_0 の値は 1 または 5 である。

- (a) $n_0 = 1$ の場合： $a(1) = 3$ 、 $b(1) = 3 \cdot 271$ となるが 271 は 3 の倍数でないので (**) に反する。
- (b) $n_0 = 5$ の場合： $a(5) = 3^3$ 、 $b(5) = 3^4 \cdot 5^2$ なので (**) より $3^4 \cdot 5^2 = 3^{A+3} 5^{m_0-1}$ となるので、 $m_0 = 3$ でなければならない。よって $(m_0, n_0) = (3, 5)$ である。

以上より A が自然数であるのは $(m, n) = (3, 5)$ のみであることがわかった。

得 点	
--------	--

氏 名	
-----	--

受 験 番 号	
------------	--

3 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx$$

$$(3) \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$$

[略解]

(1) $t = \sqrt{x+1}$ とおくと

$$x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt$$

また, x と t の対応は次のよになる。

x	0	→	1
t	1	→	$\sqrt{2}$

よって

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$$

(2) $x = \sqrt{2} \sin \theta$ とおくと, x と θ の対応は

x	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{4}$

また, $\cos \theta > 0$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) であるから

$$dx = \sqrt{2} \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{2-x^2} = \sqrt{2(1-\sin^2 \theta)} = \sqrt{2} \cos \theta$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (t^2 - 1) dt \quad (t = \cos \theta) \\ &= 2\sqrt{2} \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \end{aligned}$$

(3) $x = \tan \theta$ とおくと $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ x と θ の対応は

x	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{4}$

また, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta \cdot \cos^3 \theta \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta - \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (t = \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1+t}{1-t} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \log(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

得 点	
--------	--

氏 名	
-----	--

医 4

受 験 番 号	
------------	--

- 4
- 0でない複素数 α と複素数平面上で α を表す点 $A(\alpha)$ について、次の問に答えよ。
- (1) 複素数平面上の3点 $A(\alpha), B(\alpha^2), C(-\alpha)$ を頂点とする $\triangle ABC$ が正三角形になるような α を求めよ。
- (2) 複素数平面上の3点 $A(\alpha), B(\alpha^2), C(-\alpha)$ が一直線上にあるならば α は実数であることを示せ。
- (3) 複素数平面上の3点 $A(\alpha), B(i\alpha^2), C\left(\frac{-1}{\alpha}\right)$ が一直線上にあるような $A(\alpha)$ の範囲を複素数平面上に図示せよ。ただし、 i は虚数単位とする。

[略解]

(1) $\alpha - \alpha^2 = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right) \{\alpha - (-\alpha)\}$ より、 $\alpha = \pm\sqrt{3}i$

(2) $\alpha \neq 0$ のとき、

3点 $A(\alpha), B(\alpha^2), C(-\alpha)$ が一直線上にある $\iff \frac{\alpha - \alpha^2}{\alpha - (-\alpha)} = \frac{1 - \alpha}{2}$ が実数

となるので α は実数である。

(3) $\alpha = -i$ のとき、 $\alpha = i\alpha^2 = \frac{-1}{\alpha}$ となり3点 A, B, C は一致する。

$\alpha \neq -i$ のとき、

$$\frac{\alpha - \frac{-1}{\alpha}}{\alpha - i\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2(1 - i\alpha)} = \frac{(1 + i\alpha)(1 - i\alpha)}{\alpha^2(1 - i\alpha)} = \frac{1 + i\alpha}{\alpha^2}$$

が実数となる α の範囲を求める． $\alpha = x + iy$ (x, y は実数) とすると

$$\begin{aligned} \frac{1 + i(x + iy)}{(x + iy)^2} \text{ が実数} &\iff (x - iy)^2 \{(1 - y) + ix\} \text{ が実数} \\ &\iff x(x^2 + y^2 - 2y) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ または } x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{aligned}$$

したがって $A(\alpha)$ の範囲は 中心が $D(i)$ で半径1の円と原点を除く虚軸 ($E(-i)$ を含む) ．

図は略。

得 点	
--------	--

氏 名	
-----	--

医 5

受 験 番 号	
------------	--

5

$y = \frac{\log x}{x}$ が表す曲線 C と $y = kx$ が表す傾き k の直線 l が $y > 0$ の範囲でただ 1 つの共有点をもつとき、曲線 C 、直線 l と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

[略解]

対数の真数条件より $x > 0$ に注意する。曲線 C と直線 l が $x > 0, y > 0$ の範囲でただ一つの共有点をもつには $k > 0$ で、かつ

$$\frac{\log x}{x} - kx = x \left(\frac{\log x}{x^2} - k \right) = 0$$

がただ一つの解を持てばよい。すなわち、 $\frac{\log x}{x^2} - k = 0$ がただ一つの解をもつ k を求めればよい。 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ の増減表は $f'(x) = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$ であるから、

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

$x = \sqrt{e}$ のとき、極大値 $\frac{1}{2e}$ となるので $k = \frac{1}{2e}$ である。またこのとき、 $x > 0$ で $\frac{\log x}{x} - kx \leq 0$ であるから、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \frac{x}{2e} dx + \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x}{2e} - \frac{\log x}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4e} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{4e} - \frac{(\log x)^2}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{4e} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{4e} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

得 点	
--------	--