数　学

氏名	

受験番号	

$\boxed{1}$ a, b を $0 < |a| < |b|$ を満たす実数とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $|x^3 - a^3| + |x^3 - b^3| = |a^3 - b^3|$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

(2) n が正の偶数のとき，$|x^n - a^n| + |x^n - b^n| = |a^n - b^n|$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

[解答例]

(1) 1. $b < 0$ のとき，$b^3 < a^3$ なので求める方程式は

$$|x^3 - a^3| + |x^3 - b^3| = a^3 - b^3$$

(a) $x < b$ のとき，方程式は，$-(x^3 - a^3) + \{-(x^3 - b^3)\} = a^3 - b^3$ となる。よって $x^3 = b^3$ となり $x < b$ に反する。方程式の解はない。

(b) $b \leqq x \leqq a$ のとき，方程式の左辺は $-(x^3 - a^3) + (x^3 - b^3) = a^3 - b^3$ となるので方程式は常に成り立つ。

(c) $a < x$ のとき，方程式は，$(x^3 - a^3) + (x^3 - b^3) = a^3 - b^3$ となる。よって $x^3 = a^3$ となり $a < x$ に矛盾する。解はない。

2. $b > 0$ のとき， $a^3 < b^3$ なので求める方程式は

$$|x^3 - a^3| + |x^3 - b^3| = -a^3 + b^3$$

(a) $x < a$ のとき，方程式は $x^3 = a^3$ となるので，解はない。

(b) $a \leqq x \leqq b$ のとき，方程式の左辺は $(x^3 - a^3) - (x^3 - b^3) = -a^3 + b^3$ となるので方程式は常に成り立つ。

(c) $b < x$ のとき，方程式は $x^3 = b^3$ となるので，解はない。

1, 2 より，$\underline{b < 0 \text{ のとき } b \leqq x \leqq a,\ b > 0 \text{ のとき } a \leqq x \leqq b}$

(2) $0 < |a| < |b|$ より，$0 < a^{2m} < b^{2m}$ なので求める方程式は，$n = 2m$ のとき，

$$|x^{2m} - a^{2m}| + |x^{2m} - b^{2m}| = -a^{2m} + b^{2m}$$

1. $|x| < |a|$ のとき，方程式は $-(x^{2m} - a^{2m}) - (x^{2m} - b^{2m}) = -a^{2m} + b^{2m}$ となり $x^{2m} = a^{2m}$ よって $|x| = |a|$ となり矛盾。よって解はない。

2. $|a| \leqq |x| \leqq |b|$ のとき方程式の左辺は $(x^{2m} - a^{2m}) - (x^{2m} - b^{2m}) = -a^{2m} + b^{2m}$ となるので常に成り立つ。

3. $|b| < |x|$ のとき，方程式は $x^{2m} = b^{2m}$ となり，矛盾。よって解はない。

以上より解は，$\underline{-|b| < x < -|a|,\ |a| < x < |b|}$

数　　　学

氏名	

受験番号	

$\boxed{2}$ 以下の問に答えよ。

(1) 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$20x + 23y = 1$$

(2) $461^m - 24$ が 23^2 の倍数になる正の整数 m をすべて求めよ。

[解答例]

(1) $x = -8, y = 7$ は

$$20x + 23y = 1 \quad \cdots ①$$

の整数解であり

$$20 \cdot (-8) + 23 \cdot 7 = 1 \quad \cdots ②$$

① − ② より
$20(x+8) + 23(y-7) = 0$，すなわち

$$20(x+8) = -23(y-7) \quad \cdots ③$$

20 と 23 は互いに素であるから，$x+8$ は 23 の倍数である。よって，整数 n を用いて $x+8 = 23n$ と表せる。これを ③ に代入すると　$20 \cdot 23n = -23(y-7)$　よって　$y - 7 = -20n$
したがって，求める整数解は
$\underline{(x, y) = (-8+23n, 7-20n)\ \ (n \text{ は整数})}$

(2) $461^1 - 24 = (23 \times 20 + 1) - (23 + 1) = 19 \times 23$ より $m = 1$ は不適。$m \geqq 2$ としてよい。このとき，二項定理より

$$\begin{aligned} 461^m - 24 &= (23 \times 20 + 1)^m - (23 + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k (23 \times 20)^k - 23 - 1 \\ &= 1 + m \cdot 23 \times 20 + \sum_{k=2}^{m} {}_mC_k (23 \times 20)^k - 23 - 1 \\ &= 23^2 \cdot \sum_{k=2}^{m} {}_mC_k \cdot 23^{k-2} \cdot 20^k + (20m - 1) \cdot 23 \end{aligned}$$

したがって $m \geqq 2$ かつ $20m - 1$ が 23 の倍数であればよい。すなわち， $20m - 23l = 1$ となる自然数 l があればよい。(1) より

$$\underline{m = -8 + 23n \quad (n \geqq 1)}$$

数　　　学

氏 名	

受 験 番 号	

3 　底面が平行四辺形 OABC である四角錐 D-OABC を考え，点 X を線分 BD を 2 : 1 に内分する点，点 P を線分 AD 上の点, 点 Q を線分 CD 上の点とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ として，以下の問に答えよ。

(1) $\triangle$ACD を含む平面と直線 OX との交点を Y とする。$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ を $\vec{a},\vec{c},\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $s=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}$ とする。 4 点 O, X, P, Q が同一平面上にあるとき，s のとりうる値の範囲を求めよ。ただし点 A と点 P が一致するときは $\mathrm{AP}=0$ とする。

(3) 底面 OABC が正方形であり，四角錐 D-OABC のすべての辺の長さが 1 である場合に，(2) の条件のもとで $\triangle$DPQ の面積の最小値を求めよ。

[解答例]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$ に注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})+\frac{2}{3}\vec{d}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}$$

点 Y は線分 OX 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=t\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{t}{3}\vec{a}+\dfrac{t}{3}\vec{c}+\dfrac{2t}{3}\vec{d}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ と表される。また，点 Y は点 A, C, D を含む平面上にあるので $\dfrac{t}{3}+\dfrac{t}{3}+\dfrac{2t}{3}=1$，すなわち $t=\dfrac{3}{4}$ である。したがって，

$$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}}$$

(2) 4 点 O, X, P, Q が同一平面上にあるとき OPXQ は三角錐ではなく四角形となる。線分 PQ は $\triangle$ACD に含まれるので対角線 OX と PQ の交点が Y となる。つまり，点 Q, Y, P は同一直線上にある。逆に点 Q, Y , P が同一直線上にあれば 直線 OX と直線 PQ は点 Y で交わるので OXPQ は同一平面上にある。$\triangle$ACD において 点 Y は $\triangle$ACD 内の点なので，直線 CY は線分 AD と交わる。 その交点を P$'$ とすると， 直線 PY は $\mathrm{AP}\leqq\mathrm{AP}'$ のときは線分 CD と交わり，$\mathrm{AP}\geqq\mathrm{AP}'$ のとき，線分 AC と交わる。したがって， $0\leqq\mathrm{AP}\leqq\mathrm{AP}'$ となるときのみ，直線 PY は 線分 CD と交わることがわかる。その交点を Q とすれば条件をみたす点 P，Q が得られる。

$$\overrightarrow{\mathrm{CY}} = \overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{c}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$$

なので，実数 k により $\overrightarrow{\mathrm{CP}'}=k\overrightarrow{\mathrm{CY}}$ と表されることに注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}'}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CY}}=\frac{k}{4}\vec{a}+\left(1-\frac{3k}{4}\right)\vec{c}+\frac{k}{2}\vec{d}$$

となるが P$'$ は AD 上の点なので $1-\dfrac{3k}{4}=0$，すなわち $k=\dfrac{4}{3}$ となる。したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{d}$ となるので点 P$'$ は AD を 2 : 1 に内分する点である。以上より $0\leqq\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}\leqq\dfrac{\mathrm{AP}'}{\mathrm{AD}}=\dfrac{2}{3}$ したがって $\underline{0\leqq s\leqq\dfrac{2}{3}}$

(3) $\triangle$ACD は $\mathrm{DA}=\mathrm{DC}=1$, $\mathrm{AC}=\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形であり，$\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$ である。よって，実数 x, y により

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=x\overrightarrow{\mathrm{DA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{DQ}}=y\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

とすると $\triangle$DPQ の面積は $\dfrac{1}{2}xy$ となる。また，$\overrightarrow{\mathrm{DY}}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)$ であり，点 Y は 線分 PQ 上の点であるから $\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{4y}=1$ となる。(2) より $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 1$ となることに注意すると， $y=\dfrac{x}{4x-1}$ となるから，$\triangle$DPQ の面積は $\dfrac{x^2}{2(4x-1)}$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 1\right)$ となる。$f(x)=\dfrac{x^2}{2(4x-1)}$ とすると $f'(x)=\dfrac{x(2x-1)}{(4x-1)^2}$ より，$f(x)$ の増減表は

x	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{8}$	$\nearrow$	

よって面積は $x=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値となることがわかる。したがって，$\underline{\triangle\mathrm{DPQ}\text{ の面積の最小値は }\dfrac{1}{8}}$

数　　学

氏名	

受験番号	

4 e を自然対数の底とし，π を円周率とする。以下の問に答えよ。

(1) $e \leqq x < y$ のとき，不等式 $y\log x > x\log y$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 3 つの数 $3^{2\sqrt{2}\pi}$, $\pi^{6\sqrt{2}}$, $2^{\frac{9}{2}\pi}$ の大小関係を明らかにせよ。

[解答例]

(1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする。 $f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$ なので増減表を書くと，

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

したがって，$e \leqq x$ のとき，$f(x)$ は単調減少であるから $e \leqq x < y$ のとき， $f(x) > f(y)$ すなわち， $\dfrac{\log x}{x} > \dfrac{\log y}{y}$ となる。よって

$$y\log x > x\log y$$

(2) $e^{y\log x} = x^y$， $e^{x\log y} = y^x$ に注意すると，(1) より $e \leqq x < y$ のとき，$y\log x > x\log y$ で， e^x が単調増加関数であるから $x^y > y^x$ となる。このことから，$e < 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} < 3$ なので $\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{9}{2}} > 3^{2\sqrt{2}}$ がわかる。さらに不等式の両辺を π 乗すると

$$2^{\frac{9}{2}\pi} > 3^{2\sqrt{2}\pi}$$

となる。また，$e < 3 < \pi$ であるから同様に $3^\pi > \pi^3$ がわかる。両辺を $2\sqrt{2}$ 乗すると

$$3^{2\sqrt{2}\pi} > \pi^{6\sqrt{2}}$$

となる。以上より，

$$\underline{2^{\frac{9}{2}\pi} > 3^{2\sqrt{2}\pi} > \pi^{6\sqrt{2}}}$$

数　　学

氏名	

受験番号	

5　xy 平面上において，不等式　$(ye^x)^2 \leqq (\sin 2x)^2,\ 0 \leqq x \leqq \pi$　の表す領域を D とし，領域 D と直線 $x = a$ の共通部分の線分の長さを $l(a)$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $l(a)$ が $a = a_0$ で最大となるとき，$\tan a_0$ の値を求めよ。

(2) 領域 D の面積を求めよ。

[解答例]

(1) 不等式の両辺を $(e^x)^2$ で割ると

$$y^2 \leqq \left(e^{-x}\sin 2x\right)^2$$

$f(x) = e^{-x}\sin 2x$ とおくと領域 D は

$$-|f(x)| \leqq y \leqq |f(x)| \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

で表される。したがって $l(a) = 2|f(a)|$ である。$f'(x) = e^{-x}(-\sin 2x + 2\cos 2x)$ であるから

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\iff \quad -\sin 2x + 2\cos 2x = 0 \quad (0 \leqq 2x \leqq 2\pi) \\
&\iff \quad \tan 2x = 2 \quad (0 \leqq 2x \leqq 2\pi) \\
&\iff \quad \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 2\ (0 \leqq x \leqq \pi) \\
&\iff \quad \tan\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \left(0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}\right), \quad \tan\alpha_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\ \left(\frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi\right)
\end{aligned}$$

さらに $|\sin 2\alpha_1| = |\sin 2\alpha_2| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ であることから $|f(\alpha_1)| > |f(\alpha_2)|$ となることがわかる。$y = f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdot$	α_1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α_2	$\cdots$	π
$f'(x)$	2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha_1)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha_2)$	$\nearrow$	0

したがって $a = \alpha_1$ で $l(a)$ は最大になり　$\underline{\tan a_0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$　である。

(2) 増減表より $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $f(x) \geqq 0$, $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ で $f(x) \leqq 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x\ dx \\
&= \left[-e^{-x}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\ dx \\
&= \left[-2e^{-x}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x\ dx \\
&= \left(2e^{-\frac{\pi}{2}} + 2\right) - 4I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-x}\sin 2x\ dx \\
&= \left[-2e^{-x}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - 4J \\
&= -\left(2e^{-\pi} + 2e^{-\frac{\pi}{2}}\right) - 4J
\end{aligned}$$

よって $I = \dfrac{2}{5}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right)$, $|J| = \dfrac{2}{5}\left(e^{-\pi} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$ より，領域 D の面積は

$$2(I + |J|) = \frac{4}{5}\left(e^{-\pi} + 2e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right) = \underline{\frac{4}{5}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1\right)^2}$$