

'21

前期日程

数 学 問 題

(医 学 部)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この『数学問題』を開いてはいけません。
2. この中には、2枚の下書用紙と、問題文を含む5枚の解答用紙があります。
3. 試験開始後、直ちに、二つ折りにになっているすべての用紙を広げてください。
4. 問題に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所があった場合は申し出てください。
5. 氏名と受験番号は、すべての解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. 解答用紙の裏面は計算等の下書きに使用しても構いませんが、解答は各問題の下の解答欄に記入し、裏面は解答に使用しないでください。解答用紙の裏面に解答してもその部分は採点しません。
7. 5枚の解答用紙のみを回収しますので、この表紙と2枚の下書用紙は持ち帰ってください。

下書用紙 (1)

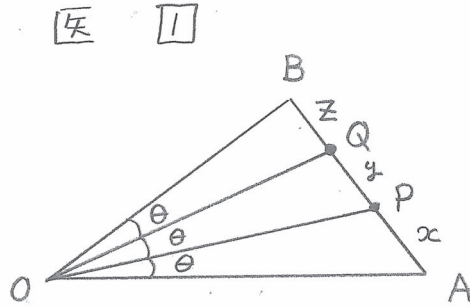
下書用紙 (2)

氏名	
----	--

受験番号	
------	--

- 1 $\triangle OAB$ において、辺 AB 上に 2 つの点を取り、点 A に近い順にそれぞれ P, Q とする。線分 OP と線分 OQ は $\angle AOB$ を 3 等分している。 $\angle AOP$ の大きさを θ とし、さらに線分 AP , 線分 PQ , 線分 QB の長さをそれぞれ x, y, z とする。このとき、 $\sin \theta$ を x, y, z で表せ。

[解答欄]



$\triangle OPQ$ の面積 S は $\frac{1}{2} OP \cdot OQ \sin \theta$
 線分 OP は $\angle AOQ$ の二等分線なので
 $OA : OQ = x : y \quad \therefore OQ = \frac{y \times OA}{x}$
 線分 OQ も $\angle POB$ の二等分線なので
 $OP : OB = y : z \quad \therefore OP = \frac{y \times OB}{z}$
 したがって $S = \frac{y^2 \times OB \times OA}{2xz} \sin \theta$... ①

他方 $\triangle OPQ$ の面積と $\triangle OAB$ の面積を比較するとき、辺 AB を底辺とみれば
 $\triangle OPQ$ の面積は $\triangle OAB$ の面積の $\frac{y}{x+y+z}$ 倍に等しいので
 $S = \frac{y}{x+y+z} \times \frac{1}{2} OA \times OB \sin 3\theta$... ②

①, ② より

$$\frac{y^2}{2xz} \sin \theta = \frac{y \sin 3\theta}{2(x+y+z)} \quad \dots ③$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta \end{aligned}$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad \text{なので}$$

③ より

$$\frac{y^2}{xz} \sin \theta = \frac{y}{x+y+z} (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)$$

$y \neq 0$. また $0 < 3\theta < \pi$ なので $\sin \theta \neq 0$. したがって

$$\frac{y}{xz} = \frac{3 - 4 \sin^2 \theta}{x+y+z}$$

ゆえに

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{4} \left\{ 3 - \frac{y(x+y+z)}{xz} \right\}$$

$\sin \theta > 0$ より

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \frac{y(x+y+z)}{xz}}$$

得点	
----	--

数 学

氏名	
----	--

受験 番号	
----------	--

2 M, A, E, B, A, S, H, I の 8 文字を使ってできる文字列について、次の問いに答えよ。ただし、A と A の 2 文字は区別せず、また、8 文字のうち母音は A, E, I である。

- (1) 8 文字すべてを使ってできる文字列はいくつあるか。
- (2) 8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで、A が隣り合うものはいくつあるか。
- (3) 8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで、どの母音も隣り合わないものはいくつあるか。
- (4) M, A, E, B, S, H, I の 7 文字を 3 組に分ける方法は何通りあるか。ただし、3 組の区別はしない。

[解答欄]

医 2

(1) すべて異なる 8 文字からなる文字列は $8!$ 通り。しかし、A と A は区別しないので

$$\frac{8!}{2!} = 20160$$

(2) 2 つの A を 1 つの文字 A とみなせば、すべて異なる 7 文字を使ってできる文字列を考えれば「よいので」

$$7! = 5040$$

(3) 母音を V, 子音を C とかく。8 文字のうち、母音も子音も 4 文字ずつなので次の 5 つを考えればよい。

- ① C V C V C V C V
- ② V C C V C V C V
- ③ V C V C C V C V
- ④ V C V C V C C V
- ⑤ V C V C V C V C

上の ① について、

V の並べ方は $\frac{4!}{2!}$ 。ここで A と A は区別しないので $2!$ で割った。他方 C の並べ方は $4!$ なので

$$\text{①は } \frac{4! \times 4!}{2!}$$

②, ③, ④, ⑤ のどれも全く同じなので $\frac{4! \times 4!}{2!} \times 5 = 1440$

(4) まず文字 M が 3 つの組のいずれかに属するのは 3 通り。次に文字 A も 3 つの組のいずれかに属するのでやはり 3 通り。どの文字についても実は同様でやはり 3 通り。したがって 7 文字を 3 組

に分ける場合の数は 3^7 通り。ただし、当面は 3 組の区別を行っている。この場合の数から 2 組が空、さらに 1 組が空になる場合の数を引く必要がある。

2 組が空になるのは 3 通り。次に、ある特定の 1 組が空になる場合の数は、どの文字も残りの 2 組に分けられるので $2^7 - 2$ 通り。ここで、2 組のうちどちらかが空になる場合の数は 2 通りなのでこれを引いたことに注意。したがって 3 組のうちどれか 1 組のみが空になる場合の数は $(2^7 - 2) \times 3$ 通り。

上では 3 組の区別を行っていたので、したがって求める方法は

$$\frac{3^7 - 3 - (2^7 - 2) \times 3}{3!} = 301 \text{ (通り)}$$

得点	
----	--

数 学

氏名	
----	--

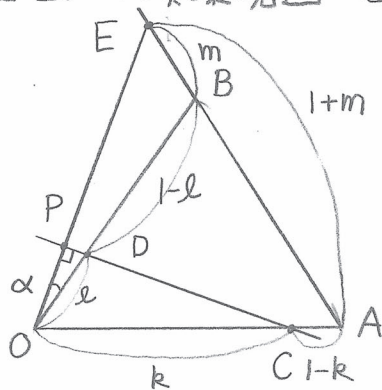
受験 番号	
----------	--

3 k と l は $0 < k < 1, 0 < l < 1$ を満たす。△OAB は1辺の長さが1の正三角形とし、辺 OA を $k : (1-k)$ に内分する点を C、辺 OB を $l : (1-l)$ に内分する点を D とする。O を通り直線 CD に垂直な直線と、直線 AB との交点を E とする。E が線分 AB を $(1+m) : m$ に外分するとき、次の問いに答えよ。ただし、 $m > 0$ である。

- (1) $k > 2l$ が成り立つことを示せ。
- (2) m を k と l を用いて表せ。
- (3) 直線 CD と直線 OE との交点を P とするとき、 $\vec{OP} = s\vec{OE}$ を満たす s を k と l を用いて表せ。
- (4) $k = 3l$ のとき、前問 (3) の s を l を用いて表せ。

[解答欄]

医 3 物質環境 3 電子機械 3 情報 3 (情報図のみ (4) は除外)



$$\begin{aligned}
 0 &= mk + (1+m)l - \{ml + (1+mk)\vec{OA} \cdot \vec{OB}\} \\
 &= mk + (1+m)l - \{ml + (1+mk)\frac{1}{2}\} \\
 &= \frac{1}{2} \{ m(k+l) + 2l - k \} \\
 \therefore m &= \frac{k-2l}{k+l}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \vec{OE} \cdot \vec{OB} &= -m\vec{OA} \cdot \vec{OB} + (1+m)|\vec{OB}|^2 \\
 &= -\frac{m}{2} + 1+m = \frac{m}{2} + 1 \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

(1) 直線 CD と直線 OE の交点を P とする。∠DOP = α とおけば、∠ODC = $\frac{\pi}{2} + \alpha$ なので ∠OCD = $\pi - (\frac{\pi}{2} + \alpha) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \alpha$ 。

他方、 $s > 0$ に注意して

$$\begin{aligned}
 \vec{OE} \cdot \vec{OB} &= OE \times OB \cos \alpha \\
 \vec{OE} \cdot \vec{OB} &= OE \times \frac{OP}{OD} = OE \times \frac{OP}{l} = \frac{s}{l} OE^2 \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \frac{OP}{OC} = \frac{OP}{k}$$

余弦定理より

$$\begin{aligned}
 OE^2 &= OA^2 + AE^2 - 2OA \times AE \cos \frac{\pi}{3} \\
 &= 1 + (1+m)^2 - 2(1+m)\frac{1}{2} = m^2 + m + 1
 \end{aligned}$$

他方、加法定理より

$$\begin{aligned}
 \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha) &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha \\
 &= \frac{1}{2} \frac{OP}{OD} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{DP}{OD} = \frac{OP - \sqrt{3} DP}{2l}
 \end{aligned}$$

これを②へ代入して

$$\vec{OE} \cdot \vec{OB} = \frac{s}{l} (m^2 + m + 1) \dots \textcircled{3}$$

$$< \frac{OP}{2l} \quad \therefore \frac{OP}{k} < \frac{OP}{2l} \quad \text{なので}$$

①, ③ より

$$\underline{k > 2l}$$

$$S = \frac{l(\frac{m}{2} + 1)}{m^2 + m + 1} = \frac{kl(k+l)}{2(k^2 - kl + l^2)}$$

$$(2) \quad \vec{OE} = \frac{-m\vec{OA} + (1+m)\vec{OB}}{1+m-m} = -m\vec{OA} + (1+m)\vec{OB}$$

(4) $k = 3l$ のとき

$$S = \frac{3l^2 \times 4l}{2l^2(9-3+1)} = \frac{6}{7}$$

他方 $\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = l\vec{OB} - k\vec{OA}$ 。
 \vec{OE} と \vec{CD} は垂直なので
 $\vec{OE} \cdot \vec{CD} = 0$ だから

情報 3 では (4) はありません (除外して下さい)。

点	
---	--

数 学

氏名	
----	--

受験番号	
------	--

4

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について答えよ。 n を正の整数とすると、

$$a_1 = 1, \quad b_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}.$$

- (1) 不等式 $b_m < a_m$ を満たす正の整数 m をすべて求めよ。
- (2) $a_1, b_1, a_m, b_m, a_{m+1}, b_{m+1}$ の大小関係を不等号 $<$ を用いて表せ。ここで、 m は 2 以上の整数である。
- (3) n を正の整数とすると、不等式 $|a_n - b_n| < 2^{(1-2^n)}$ が成り立つことを証明せよ。

[解答欄]

医 4 | 情報 4 | 物質環境 4 | 電子機械 4 (情報 4, 物質環境 4, 電子機械 4 では (3) は除外)

(1) $b_1 = \sqrt{2}, a_1 = 1$ より $b_1 < a_1$ は成立しないので、 m は 2 以上。

$$a_2 - b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{2a_1b_1}{a_1 + b_1} = \frac{(a_1 - b_1)^2}{2(a_1 + b_1)} > 0$$

2 以上の整数 m に対して

$a_m > b_m$ と仮定する。

$$a_{m+1} - b_{m+1} = \frac{a_m + b_m}{2} - \frac{2a_mb_m}{a_m + b_m} = \frac{(a_m - b_m)^2}{2(a_m + b_m)} > 0.$$

よっての正の整数 n について

$a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ であることに注意したから $b_m < a_m$ が成立するのは m が 2 以上の任意の整数

のとき、 n を 1 以上の整数とする。

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \times \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n \text{ なので}$$

$$a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = \dots = a_2b_2 = a_1b_1 = \sqrt{2}.$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \text{ なので}$$

$$a_2 - a_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} > 0.$$

他方 m を 2 以上の整数とすると

$$a_{m+1} - a_m = \frac{b_m - a_m}{2} < 0$$

なので $a_{m+1} < a_m \dots$ (2) (m は 2 以上の整数)

$$\text{① より } \frac{\sqrt{2}}{b_{m+1}} < \frac{\sqrt{2}}{b_m} \text{ なので}$$

$$b_m < b_{m+1} \quad (m \text{ は 2 以上の整数}) \dots \text{③}$$

$$b_m < b_{m+1} < a_{m+1} < a_m \dots \text{④}$$

$$\text{よって } b_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1 + b_1} = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} > 1 = a_1$$

なぜなら $\sqrt{2} > 1$ より $2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{2}$.

ゆえに $\frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} > 1$ だから。

$$\text{さらに ① より } a_2 = \frac{\sqrt{2}}{b_2} = \sqrt{2} \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = b_1 \dots \text{⑥}$$

④, ⑤, ⑥ より

$$a_1 < b_m < b_{m+1} < a_{m+1} < a_m < b_1$$

$$(3) \quad n=1 \text{ のとき } |a_1 - b_1| = \sqrt{2} - 1$$

$$< \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} = 2^{(1-2^1)} \text{ より 成立.}$$

$$n=2 \text{ のとき } |a_2 - b_2| = a_2 - b_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} - 7}{2} < 2^{(1-2^2)}$$

($\because 2 < (\frac{29}{20})^2$) 2 以上の整数 n について $|a_n - b_n| < 2^{(1-2^n)}$ を仮定.

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = a_{n+1} - b_{n+1}$$

$$= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} < \frac{(a_n - b_n)^2}{2(b_n + b_n)}$$

$$< \frac{(a_n - b_n)^2}{2 \cdot 2a_1} < \frac{(a_n - b_n)^2}{2} < \frac{1}{2} (2^{(1-2^n)})^2$$

$$= \frac{1}{2} 2^{(2-2^{n+1})} = 2^{(1-2^{n+1})}.$$

$n+1$ のときも成立.

したがって すべての正の整数 n に対して $|a_n - b_n| < 2^{(1-2^n)}$ が成立.

得点	
----	--

数 学

氏名	
----	--

受験番号	
------	--

5

a, b, c, d を実数の定数とすると、すべての実数 x で定義された関数 $f(x)$ について、次の問いに答えよ。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0), \\ x^3 + ax^2 + bx + c & (0 < x \leq 1), \\ 0 & (1 < x \leq 2), \\ de^{-\frac{1}{x-2}} & (x > 2). \end{cases}$$

ここで、任意の正の実数 X と任意の正の整数 n について、 $e^X \geq \frac{X^n}{n!}$ が成り立つことを使ってよい。

- (1) 関数 $f(x)$ がすべての x で微分可能であるための、 a, b, c, d についての必要十分条件を求めよ。
- (2) a, b, c, d が上の (1) で与えられた必要十分条件を満たすとき、関数 $f(x)$ の $x=0, x=1, x=2$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

[解答欄]

医 5 その1

(1) $f(x)$ はすべての x で微分可能と仮定する。したがってすべての x で連続である。ゆえに $x=0$ でも $x=1$ でも $x=2$ でも連続。

$x=0$ における連続性: まず $f(0)=0$ 。

$x < 0$ のとき $f(x) = x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$)

$0 < x < 1$ のとき $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow c$ ($x \rightarrow 0$) ゆえに $c=0$... ①

$x=1$ における連続性:

①より $f(1) = a + b + 1$ 。

$0 < x < 1$ のとき $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow a + b + 1$ ($x \rightarrow 1$)

$1 < x < 2$ のとき $f(x) = 0 \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 1$)

ゆえに $a + b + 1 = 0$... ②

$x=2$ における連続性: まず $f(2)=0$ 。

①と②を使う。

$1 < x < 2$ のとき $f(x) = 0 \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 2$)

$x > 2$ のとき $f(x) = de^{-\frac{1}{x-2}} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 2$)

なぜならば $x > 2$ のとき

$$e^{-\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}}} \leq \frac{1}{x-2} = x-2$$

したがって $f(x)$ がすべての x で連続であれば、①と②が成立する。

次に微分可能性。仮定より

$f(x)$ は $x=0$ でも $x=1$ でも

$x=2$ でも微分可能。

$x=0$ における微分可能性:

$x < 0$ のとき

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x} = 1 \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

$0 < x < 1$ のとき ①, ②より

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c - 0}{x} = x^2 + ax + b \rightarrow b \quad (x \rightarrow 0)$$

$$= x^2 + ax + b \rightarrow b \quad (x \rightarrow 0)$$

ゆえに $b = 1$... ③ ②より $a = -2$... ④

このとき $f'(0) = 1$... ④

$x=1$ における微分可能性:

①, ③, ④を使う。 $f(1)=0$ に注意。

$0 < x < 1$ のとき

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 0}{x - 1} = x^2 - x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$$

$$= x^2 - x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$$

$1 < x < 2$ のとき

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{0 - 0}{x - 1} = 0 \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 1)$$

ゆえに $f'(1) = 0$

$x=2$ における微分可能性:

$f(2)=0$ に注意。

$1 < x < 2$ のとき

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{0 - 0}{x - 2} = 0 \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 2)$$

$x > 2$ のとき

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{de^{-\frac{1}{x-2}} - 0}{x - 2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 2)$$

得点	
----	--

数 学

氏名

受験
番号

5

a, b, c, d を実数の定数とすると、すべての実数 x で定義された関数 $f(x)$ について、次の問いに答えよ。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0), \\ x^3 + ax^2 + bx + c & (0 < x \leq 1), \\ 0 & (1 < x \leq 2), \\ de^{-\frac{1}{x-2}} & (x > 2). \end{cases}$$

ここで、任意の正の実数 X と任意の正の整数 n について、 $e^X \geq \frac{X^n}{n!}$ が成り立つことを使ってよい。

- (1) 関数 $f(x)$ がすべての x で微分可能であるための、 a, b, c, d についての必要十分条件を求めよ。
 (2) a, b, c, d が上の (1) で与えられた必要十分条件を満たすとき、関数 $f(x)$ の $x=0, x=1, x=2$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

[解答欄]

[医 5] その2

なぜならば

$$\frac{e^{-\frac{1}{x-2}}}{x-2} = \frac{1}{(x-2)e^{\frac{1}{x-2}}} \\ \leq \frac{1}{(x-2) \frac{(\frac{1}{x-2})^2}{2!}} = 2(x-2).$$

$$\text{ゆえに } \underline{f'(2) = 0}$$

したがって $f(x)$ がすべての x で
微分可能であれば

$$\underline{a = -2 \text{ かつ } b = 1 \text{ かつ } c = 0 \text{ かつ}} \\ \underline{d \text{ は任意の実数となる.}}$$

逆に ⑤ が満たされれば
 $f(x)$ はすべての x で微分可能
であることがわかる。

したがって

$$\underline{a = -2 \text{ かつ } b = 1 \text{ かつ } c = 0} \\ \underline{\text{かつ } d \text{ は任意の実数}}$$

(2) (1) より

$$\underline{f'(0) = 1, f'(1) = 0, f'(2) = 0}$$

得
点