’21

前期日程

数　学　問　題

（理工学部　物質・環境類）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この『数学問題』を開いてはいけません。
2. この中には, 2 枚の下書用紙と, 問題文を含む 6 枚の解答用紙があります。
3. 試験開始後，直ちに, 二つ折りになっているすべての用紙を広げてください。
4. 問題に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所があった場合は申し出てください。
5. 氏名と受験番号は，問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ を含むすべての解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. 問題 $\boxed{1}$ から問題 $\boxed{4}$ までは全て解答してください。 問題 $\boxed{5}$ (数学 III を含まない) と問題 $\boxed{6}$ (数学 III を含む) は選択問題ですので, どちらか 1 題を選択し, その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また, 選択しなかった問題の解答欄に 「選択しない」 と記入してください。「選択しない」 と記入しなかった場合や問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ の両方を解答した場合は, 両方の答案が 0 点になることがありますので, 注意してください。
7. 解答用紙の裏面は計算等の下書きに使用しても構いませんが，解答は各問題の下の解答欄に記入し，裏面は解答に使用しないでください。解答用紙の裏面に解答してもその部分は採点しません。
8. 問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ の選択問題の解答用紙を含む 6 枚の解答用紙のみを回収しますので，この表紙と 2 枚の下書用紙は持ち帰ってください。

下　書　用　紙　(1)

下　書　用　紙　(2)

数　　　学

氏名	

受験番号	

1 円 $(x-2)^2+y^2=1$ と直線 $y=mx$ が異なる 2 点 P, Q で交わっているとき, 次の問いに答えよ。

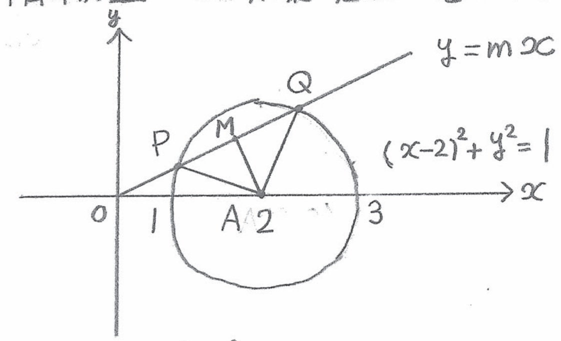
(1) m の値の範囲を求めよ。

(2) 円の中心を A とするとき, $\triangle$APQ の面積を m で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 M の座標を (p, q) とする。m の値が (1) の範囲で変化するとき, p と q の満たす方程式を p と q のみで表せ。

[解答欄]

情報1　物質環境1　電子機械1



(1) $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1\\ y=mx\end{cases} \rightarrow (x-2)^2+m^2x^2=1$

$\therefore (1+m^2)x^2-4x+3=0 \cdots①$

異なる2点で交わるので、判別式 $D>0$ なので

$D=16-12(1+m^2)>0$

$m^2<\frac{1}{3}$ より $-\frac{1}{\sqrt{3}}<m<\frac{1}{\sqrt{3}}$

分母の有理化しなくてもOK

(2) ① より $x=\frac{2\pm\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}$

したがって

点P $\left(\frac{2-\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2},\ m\frac{2-\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}\right)$

点Q $\left(\frac{2+\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2},\ m\frac{2+\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}\right)$

となるので

$PQ=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}\right)^2+\left(m\frac{2\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{1-3m^2}\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$

$=2\sqrt{\frac{1-3m^2}{1+m^2}}$

点A(2, 0)と直線 $mx-y=0$ の距離は

$\frac{|m\times2-0|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2|m|}{\sqrt{1+m^2}}$

したがって $\triangle$APQ の面積は

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{1-3m^2}{1+m^2}}\times\frac{2|m|}{\sqrt{1+m^2}}$

$=\frac{2|m|\sqrt{1-3m^2}}{1+m^2}$

(3)

点Mの座標は

$\left(\frac{2}{1+m^2},\ \frac{2m}{1+m^2}\right)$ だから

$p=\frac{2}{1+m^2},\ q=\frac{2m}{1+m^2}$

m を消去すると

$p^2-2p+q^2=0$

or

$(p-1)^2+q^2=1$

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

2　M, A, E, B, A, S, H, I の 8 文字を使ってできる文字列について, 次の問いに答えよ。ただし, A と A の 2 文字は区別せず, また, 8 文字のうち母音は A, E, I である。

(1) 8 文字すべてを使ってできる文字列はいくつあるか。

(2) 8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで, A が隣り合うものはいくつあるか。

(3) 8 文字すべてを使ってできる文字列のなかで, どの母音も隣り合わないものはいくつあるか。

[解答欄]

情報2　物質環境2　電子機械2

(1) すべて異なる8文字からなる文字列は 8！通り. しかし, AとAは区別しないので

$$\frac{8!}{2!} = \underline{20160}$$

(2) 2つのAを1つの文字Aとみなせば, すべて異なる7文字を使ってできる文字列を考えればよいので

$$7! = \underline{5040}$$

(3) 母音をV, 子音をCとかく. 8文字のうち, 母音も子音も4文字ずつなので 次の5つの場合を考えればよい.

① CVCVCVCV

② VCCVCVCV

③ VCVCCVCV

④ VCVCVCCV

⑤ VCVCVCVC

上の①について, Vの並べ方は $\frac{4!}{2!}$. ここでAとAは区別しないので 2!で割った.

他方 Cの並べ方は 4! なので

①は $\frac{4! \times 4!}{2!}$

②, ③, ④, ⑤のどれも全く同じなので

$$\frac{4! \times 4!}{2!} \times 5 = \underline{1440}$$

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

3　k と l は $0<k<1,\ 0<l<1$ を満たす。△OAB は 1 辺の長さが 1 の正三角形とし, 辺 OA を $k:(1-k)$ に内分する点を C, 辺 OB を $l:(1-l)$ に内分する点を D とする。O を通り直線 CD に垂直な直線と, 直線 AB との交点を E とする。E が線分 AB を $(1+m):m$ に外分するとき, 次の問いに答えよ。ただし, $m>0$ である。

(1) $k>2l$ が成り立つことを示せ。

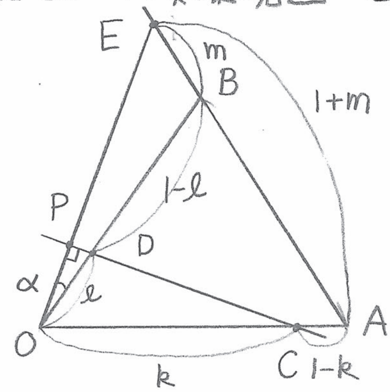
(2) m を k と l を用いて表せ。

(3) 直線 CD と直線 OE との交点を P とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を満たす s を k と l を用いて表せ。

(4) $k=3l$ のとき, 前問 (3) の s を l を用いて表せ。

[解答欄]

医 3　物質環境 3　電子機械 3　情報 3（情報 3 のみ (4) は除外）



(1) 直線CDと直線OEの交点をPとする. $\angle \mathrm{DOP}=\alpha$ とおけば, $\angle \mathrm{ODC}=\frac{\pi}{2}+\alpha$ なので $\angle \mathrm{OCD}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\pi}{6}-\alpha$.

$\therefore\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OC}}=\frac{\mathrm{OP}}{k}$

他方, 加法定理より

$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OD}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{OD}}=\frac{\mathrm{OP}-\sqrt{3}\,\mathrm{OP}}{2l}$

$<\frac{\mathrm{OP}}{2l}$　$\therefore\ \frac{\mathrm{OP}}{k}<\frac{\mathrm{OP}}{2l}$ なので

$\boxed{k>2l}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{-m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1+m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+m-m}=-m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1+m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

他方

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=l\overrightarrow{\mathrm{OB}}-k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直なので

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ だから

$0=mk+(1+m)l-\{ml+(1+m)k\}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=mk+(1+m)l-\{ml+(1+m)k\}\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\{m(k+l)+2l-k\}$

$\therefore\ \boxed{m=\frac{k-2l}{k+l}}$

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-m\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1+m)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=-\frac{m}{2}+1+m=\frac{m}{2}+1$ … ①

他方, $s>0$ に注意して

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\mathrm{OE}\times\mathrm{OB}\cos\alpha$

$=\mathrm{OE}\times\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OD}}=\mathrm{OE}\times\frac{\mathrm{OP}}{l}=\frac{s}{l}\mathrm{OE}^2$ … ②

余弦定理より

$\mathrm{OE}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{AE}^2-2\mathrm{OA}\times\mathrm{AE}\cos\frac{\pi}{3}$

$=1+(1+m)^2-2(1+m)\frac{1}{2}=m^2+m+1$

これを②へ代入して

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{s}{l}(m^2+m+1)$ … ③

①, ③ より

$s=\frac{l\left(\frac{m}{2}+1\right)}{m^2+m+1}=\boxed{\frac{kl(k+l)}{2(k^2-kl+l^2)}}$

(4) $k=3l$ のとき

$s=\frac{3l^2\times 4l}{2l^2(9-3+1)}=\boxed{\frac{6}{7}l}$

→ 情報 3 では (4) は ありません（除外して下さい）。

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

4 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について答えよ。n を正の整数とするとき,

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}.$$

(1) 不等式 $b_m < a_m$ を満たす正の整数 m をすべて求めよ。

(2) $a_1, b_1, a_m, b_m, a_{m+1}, b_{m+1}$ の大小関係を不等号 $<$ を用いて表せ。ここで, m は 2 以上の整数である。

[解答欄]

医④ 情報④ 物質環境④ 電子機械④ (情報④, 物質環境④, 電子機械④では(3)は除外)

(1) $b_1=\sqrt{2}$, $a_1=1$ より $b_1<a_1$ は成立しないので, mは2以上.

$a_2-b_2=\frac{a_1+b_1}{2}-\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{(a_1-b_1)^2}{2(a_1+b_1)}>0$

2以上の整数mに対して $a_m>b_m$ と仮定する.

$a_{m+1}-b_{m+1}=\frac{a_m+b_m}{2}-\frac{2a_mb_m}{a_m+b_m}$

$=\frac{(a_m-b_m)^2}{2(a_m+b_m)}>0$. ここで

すべての正の整数nについて $a_n>0$ かつ $b_n>0$ であることに注意.

したがって $b_m<a_m$ が成立するのは mが2以上の任意の整数のとき.

(2) nを1以上の整数とする.

$a_{n+1}b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\times\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$

$=a_nb_n$ なので

$a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n=\cdots=a_2b_2$

$=a_1b_1=\sqrt{2}$. だから $b_n=\frac{\sqrt{2}}{a_n}$ …①

さて $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n$

$=\frac{b_n-a_n}{2}$ なので

$a_2-a_1=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}>0$.

他方 mを2以上の整数とするとき

(1)より

$a_{m+1}-a_m=\frac{b_m-a_m}{2}<0$

なので $a_{m+1}<a_m$ …②

(mは2以上の整数)

①より $\frac{\sqrt{2}}{b_{m+1}}<\frac{\sqrt{2}}{b_m}$ なので

$b_m<b_{m+1}$ (mは2以上の整数) …③

(1), ②, ③ より

$b_m<b_{m+1}<a_{m+1}<a_m$ …④

ところで $b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}>1=a_1$ …⑤

なぜなら $\sqrt{2}>1$ より $2\sqrt{2}>1+\sqrt{2}$.

ゆえに $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}>1$ だから.

さらに ① より $a_2=\frac{\sqrt{2}}{b_2}=\sqrt{2}\,\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}=b_1$ …⑥

④, ⑤, ⑥ より

$a_1<b_m<b_{m+1}<a_{m+1}<a_m<b_1$

(3) $n=1$ のとき $|a_1-b_1|=\sqrt{2}-1$

$<\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}=2^{(1-2^1)}$ より成立.

$n=2$ のとき $|a_2-b_2|=a_2-b_2$

$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}-7}{2}<2^{(1-2^2)}$

$(\because 2<(\frac{29}{20})^2)$ 2以上の整数n

について $|a_n-b_n|<2^{(1-2^n)}$ を仮定.

$|a_{n+1}-b_{n+1}|=a_{n+1}-b_{n+1}$

$=\frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}<\frac{(a_n-b_n)^2}{2(b_n+b_n)}$

$<\frac{(a_n-b_n)^2}{2\cdot 2a_1}<\frac{(a_n-b_n)^2}{2}<\frac{1}{2}\left(2^{(1-2^n)}\right)^2$

$=\frac{1}{2}2^{(2-2^{n+1})}=2^{(1-2^{n+1})}$.

$n+1$ のときも成立.

したがってすべての正の整数nに対して $|a_n-b_n|<2^{(1-2^n)}$ が成立.

得点	

数　学

氏名	

受験番号	

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので、どちらか 1 題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また，選択しなかった問題の解答欄に 「選択しない」 と記入してください。

5 a, b, c は実数の定数とし，また関数 $f(x)=ax,\ g(x)=bx+c$ は次の 3 つの条件を満たしている。

$$\text{(i)}\quad \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx=1, \qquad \text{(ii)}\quad \int_0^1 \{g(x)\}^2\,dx=1, \qquad \text{(iii)}\quad \int_0^1 f(x)g(x)\,dx=0.$$

(1) a, b, c の値を求めよ。

(2) 2 つの実数 s, t が $\int_0^1 \{s\,f(x)+t\,g(x)\}^2\,dx \leqq 4$ を満たしているとき，$-3s+t$ の最大値と，そのときの s, t の値を求めよ。

※補足説明　f(x)² は{f(x)}² を、g(x)² は{g(x)}² をそれぞれ表す。

［解答欄］

情報 5　物質環境 5

(1) $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = \int_0^1 a^2x^2 dx$

$= a^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a^2}{3} = 1$ より $a=\pm\sqrt{3}$ …①

$\int_0^1 \{g(x)\}^2 dx = \int_0^1 (b^2x^2+2bcx+c^2)dx$

$= \left[b^2\frac{x^3}{3}+bcx^2+c^2x\right]_0^1 = \frac{b^2}{3}+bc+c^2 = 1$ …②

$\int_0^1 f(x)g(x)dx = a\int_0^1 (bx^2+cx)dx$

$= a\left[b\frac{x^3}{3}+c\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = a\left(\frac{b}{3}+\frac{c}{2}\right)=0$ …③

①, ②, ③を連立させて解くと，

$a=\pm\sqrt{3},\ b=\pm3,\ c=\mp2$

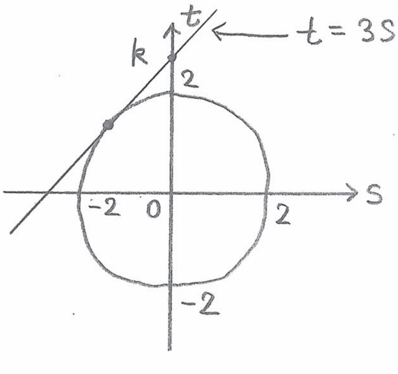
(bとcは複号同順)

(2)

$\int_0^1 \{s\,f(x)+t\,g(x)\}^2 dx$

$= \int_0^1 \left[s^2\{f(x)\}^2+2st\,f(x)g(x)+t^2\{g(x)\}^2\right]dx$

$= s^2+t^2 \leqq 4.$　$k=-3s+t$ とおくと，



直線 $t=3s+k$ が円 $s^2+t^2=2^2$ に st平面の第2象限で接するときに k が最大値をとる.

$\begin{cases} s^2+t^2=2^2 \\ t=3s+k \end{cases}$ これより

$s^2+(3s+k)^2=2^2$

$\therefore 10s^2+6ks+k^2-4=0$

s の2次方程式とみなして判別式 $D=0$ とおくと

$36k^2-40(k^2-4)=0.$

$\therefore -k^2+40=0$　$\therefore k=\pm2\sqrt{10}$

$k>0$ が最大値なので

$k=2\sqrt{10}.$

このとき s の2次方程式は

$5s^2+6\sqrt{10}s+18=0$ なので

$s=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$

t は

$t=3s+k=-\frac{9\sqrt{10}}{5}+2\sqrt{10}$

$=\frac{1}{5}\sqrt{10}$

ゆえに 最大値 $2\sqrt{10}$,

このとき $s=-\frac{3}{5}\sqrt{10}$,

$t=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

得点	

数　　　学

氏 名	

受験番号	

問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ は選択問題ですので、どちらか 1 題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また，選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

$\boxed{6}$ a, b, c を実数の定数とするとき，すべての実数 x で定義された関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \leqq 0), \\ x^3+ax^2+bx+c & (0<x \leqq 1), \\ 0 & (x>1). \end{cases}$$

(1) 関数 $f(x)$ がすべての x で連続であるための，a, b, c についての必要十分条件を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ がすべての x で微分可能であるための，a, b, c についての必要十分条件を求めよ。

(3) a, b, c が上の (2) で与えられた必要十分条件を満たすとき，関数 $f(x)$ の $x=0,\ x=1$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

[解答欄]

情報 $\boxed{6}$　物質環境 $\boxed{6}$　電子機械 $\boxed{5}$

(1) $f(x)$ は すべての x で連続と仮定する。したがって $x=0$ でも $x=1$ でも連続である。

$x=0$ において：まず $f(0)=0$.

$x<0$ のときは $f(x)=x \xrightarrow[(x\to 0)]{} 0$

$0<x<1$ のときは $f(x)=x^3+ax^2+bx+c \xrightarrow[(x\to 0)]{} c$　ゆえに $c=0$ …①

$x=1$ において：まず $f(1)=a+b+c+1$
$=a+b+1$　($\because c=0$)

$0<x<1$ のときは $f(x)=x^3+ax^2+bx$
$\to a+b+1$ $(x\to 1)$

$x>1$ のときは $f(x)=0 \xrightarrow{(x\to 1)} 0$.

ゆえに $a+b+1=0$ …②

逆に①と②が満たされれば $f(x)$ は すべての x で連続。

したがって $c=0$ かつ $a+b+1=0$

(2) $f(x)$ は すべての x で微分可能と仮定する。当然，すべての x で連続だから，①と②が成立。

$x=0$ でも $x=1$ でも微分可能である。

$x=0$ において：　$x<0$ のとき

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x-0}{x}=1 \xrightarrow{(x\to 0)} 1$$

$0<x<1$ のとき

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3+ax^2+bx-0}{x}$$

$=x^2+ax+b \to b$ $(x\to 0)$ …④

$\therefore b=1$ …③　②より $a=-2$　これより $f'(0)=1$

$x=1$ において：①, ③, ④より

$0<x<1$ のとき

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^3-2x^2+x-0}{x-1}$$

$=x^2-x \to 0$ $(x\to 1)$

$x>1$ のとき

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{0-0}{x-1}=0 \xrightarrow{(x\to 1)} 0$$

また $f'(1)=0$

逆に ①, ③, ④ が満たされれば $f(x)$ は すべての x で微分可能。

したがって

$a=-2$ かつ $b=1$ かつ $c=0$

(3)　(2) より

$f'(0)=1$，$f'(1)=0$

得点	