# 数　　学

氏名

受験番号

1　$\theta_n = \dfrac{5\pi}{6n(n+1)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，初項がそれぞれ $a_1 = \cos\theta_1$, $b_1 = \sin\theta_1$ で与えられ，漸化式 $a_{n+1} = a_n \cos\theta_{n+1} - b_n \sin\theta_{n+1}$, $b_{n+1} = a_n \sin\theta_{n+1} + b_n \cos\theta_{n+1}$ を満たす。

(1) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の極限を求めよ。

[ 解答欄 ]

---

(1)　すべての自然数 $n$ について

$$a_n = \cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n), \quad b_n = \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n) \quad \cdots \quad (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

・ $n=1$ のとき $(*)$ は正しい．

・ $n$ のとき $(*)$ は正しいと仮定する．このとき，漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n)\cos\theta_{n+1} - \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)\sin\theta_{n+1} \\ &= \cos(\theta_1 + \cdots + \theta_{n+1}) \quad (\text{加法定理}) \\ b_{n+1} &= \cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n)\sin\theta_{n+1} + \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)\cos\theta_{n+1} \\ &= \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_{n+1}) \quad (\text{加法定理}) \end{aligned}$$

となり，$(*)$ は $n+1$ のときも正しい．よって，数学的帰納法により $(*)$ はすべての自然数 $n$ について正しい．

ここで

$$\begin{aligned} \theta_1 + \cdots + \theta_n &= \frac{5\pi}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{5\pi}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{5\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{5n\pi}{6(n+1)} \end{aligned}$$

より，$a_n = \cos\dfrac{5n\pi}{6(n+1)}$, $b_n = \sin\dfrac{5n\pi}{6(n+1)}$ となる．

**答え：** $a_n = \cos\dfrac{5n\pi}{6(n+1)}$, $b_n = \sin\dfrac{5n\pi}{6(n+1)}$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

**答え：** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$



得点

# 数　　　学

| 氏名 | | 受験番号 | |
|---|---|---|---|

2　複素数平面上の点 $z$ と点 $w$ の関係は，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ であるとする。ただし，$i$ は虚数単位である。

(1) $z=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$ のとき，$w$ の実部を求めよ。

(2) 点 $w$ が点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 $z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

［解答欄］

(1)　$z=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$ のとき

$$|z+i|^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2=2$$

および

$$\begin{aligned}(z-i)\overline{(z+i)}\text{ の実部} &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{3+\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)\text{ の実部}\\ &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}\end{aligned}$$

より

$$w\text{ の実部}=\frac{(z-i)\overline{(z+i)}}{|z+i|^2}\text{ の実部}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

答え：$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(2)　与えられた条件は，$|w-(-1+i)|=1$ と同値である．よって

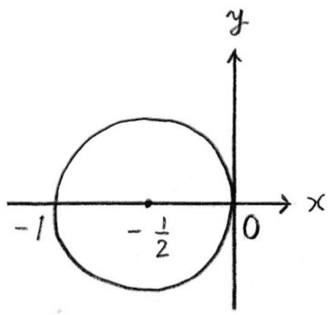
$$w-(-1+i)=\frac{z-i}{z+i}+1-i=\frac{(2-i)z+1}{z+i}$$

に注意すると，$z=x+yi$ ($x,y$ は実数) とするとき

$$\begin{aligned}\text{与条件} &\iff |(2-i)z+1|=|z+i|\\ &\iff |(2-i)z+1|^2=|z+i|^2\\ &\iff (2x+y+1)^2+(2y-x)^2=x^2+(y+1)^2\\ &\iff x^2+x+y^2=0\\ &\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

よって，点 $z$ は中心が点 $-\dfrac{1}{2}$，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円周上を動く．

答え：






| 得点 | |
|---|---|

医 3

# 数　　　学

| 氏名 | |
|---|---|

| 受験番号 | |
|---|---|

3　$a$, $b$ は実数で，$a < b < 1$ であるとする。$a + b + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 10$ かつ $a + b + ab + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{ab} = 34$ のとき，$a$, $b$ の値を求めよ。

［解答欄］

$a + \dfrac{1}{a} = A,\ b + \dfrac{1}{b} = B$ とすると

$$\text{与条件式} \iff A + B = 10 \text{ かつ } AB = 24$$
$$\iff A, B \text{ は 2 次方程式 } x^2 - 10x + 24 = 0 \text{ の解}$$

この 2 次方程式を解いて

$$x = \frac{1}{2}\left(10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 24}\right) = 4, 6$$

よって，$a, b$ は方程式 $t + \dfrac{1}{t} = 4$ または $t + \dfrac{1}{t} = 6$ を満たす．これらの方程式を解くと

$$t + \frac{1}{t} = 4 \iff t^2 - 4t + 1 = 0 \iff t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$t + \frac{1}{t} = 6 \iff t^2 - 6t + 1 = 0 \iff t = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

ここで，$2 + \sqrt{3}$ と $3 + 2\sqrt{2}$ は条件 $a < b < 1$ を満たさない．また

$$2 - \sqrt{3} > 2 - 1.72 = 0.28, \quad 3 - 2\sqrt{2} < 3 - 2 \times 1.4 = 0.2$$

より，$3 - 2\sqrt{2} < 2 - \sqrt{3} < 1$ が成り立つ．以上より，$a = 3 - 2\sqrt{2}, b = 2 - \sqrt{3}$ となる．

答え：$a = 3 - 2\sqrt{2},\ b = 2 - \sqrt{3}$



| 得点 | |
|---|---|

# 数　　学

| 氏名 | |
|---|---|

| 受験番号 | |
|---|---|

**4** 四面体 OABC において，OA = OB = OC = 2 かつ BC = 3 であるとする。△OBC の重心を G とするとき，直線 AG は △OBC を含む平面に垂直であるとする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。

(2) 点 B から △OAC を含む平面に下ろした垂線は，直線 AG と交わらないことを示せ。

［解答欄］

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

(1)

$$\begin{aligned}3^2 &= \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\ &= |\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=2^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2^2\end{aligned}$$

より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}(2^2+2^2-3^2)=-\frac{1}{2}$$

答え： $-\dfrac{1}{2}$

(2)　直線 AG 上の任意の点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が △OAC を含む平面に垂直ではないことを示せばよい．そのために，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が $\vec{c}$ に垂直ではないことを示す．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AG}}\qquad (s\text{ は実数})$$

と表わせるので

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\vec{a}-\vec{b})+s\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}$$

より

$$\vec{a}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

仮定より $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\vec{c}=0$ が成り立つことと，(1) の結果を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{c} &= -\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{3}|\vec{c}|^2+(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\vec{c}\\ &= -\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\times 2^2=\frac{5}{3}\neq 0\end{aligned}$$

これは，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が $\vec{c}$ に垂直ではないことを意味する．よって，題意が示された．



| 得点 | |
|---|---|

# 数　　学

| 氏 名 | |
|---|---|

| 受 験 番 号 | |
|---|---|

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\log x$ がある。曲線 $y=f(x)$ $(1 \leqq x \leqq e)$ を $C$ とし，直線 $y=x$ を $\ell$ とする。$C$ 上の点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$，$\mathrm{B}(e,\ f(e))$ から $\ell$ に下した垂線の足をそれぞれ M，N とする。ただし，$\log x$ は $e$ を底とする自然対数である。

(1) $C$ の長さを求めよ。

(2) $C$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ から $\ell$ に下ろした垂線の足 Q について，線分 MQ の長さを $g(x)$ とおくとき，$\sqrt{2}\int_0^{g(e)} \log g^{-1}(t)\,dt$ を求めよ。ただし，$g^{-1}(x)$ は $g(x)$ の逆関数である。

[ 解答欄 ]

(1)

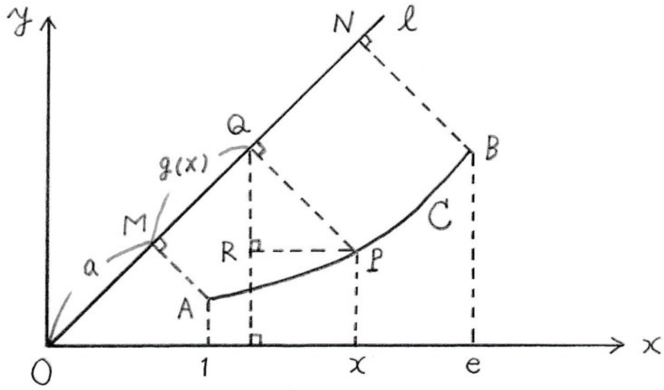
$$\sqrt{1+f'(x)^2}=\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}^2}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}^2}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \qquad (x \text{ は正より})$$

よって

$$C \text{ の長さ}=\int_1^e \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\log x\right]_1^e=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

**答え： $\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$**

(2)




上図において，線分 PR の長さと線分 QR の長さは等しい．よって，線分 OM の長さを $a$ とすると

$$x-\frac{1}{\sqrt{2}}(g(x)+a)=\frac{1}{\sqrt{2}}(g(x)+a)-f(x)$$

が成り立つ．これより

$$\sqrt{2}g(x)=x+f(x)-\sqrt{2}a, \quad \sqrt{2}g'(x)=1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

よって，変数変換 $x=g^{-1}(t)$ $(\Leftrightarrow t=g(x))$ により

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\int_0^{g(e)} \log g^{-1}(t)dt &= \int_1^e (\log x)\cdot\sqrt{2}g'(x)dx=\int_1^e\left(\log x+\frac{1}{2}x\log x-\frac{\log x}{2x}\right)dx\\
&= \int_1^e\left((x)'\log x+\frac{1}{4}(x^2)'\log x-\frac{1}{4}((\log x)^2)'\right)dx\\
&= \left[x\log x-x+\frac{1}{4}x^2\log x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}((\log x)^2\right]_1^e=\frac{e^2}{8}+\frac{7}{8}
\end{aligned}$$

**答え： $\frac{e^2}{8}+\frac{7}{8}$**



| 得 点 | |
|---|---|