数　　学

氏名	

受験番号	

1 関数 $f(x) = 2^{3x} + 2^{-3x} - 3 \cdot 2^{3+x} - 3 \cdot 2^{3-x}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ がある。$t = 2^x + 2^{-x}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ とする。

(1) $f(x)$ を t を用いて表せ。

(2) t の最小値を求めよ。

(3) $f(x)$ の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

[解答欄]

---

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2^x)^3 + (2^{-x})^3 - 3 \cdot 2^3(2^x + 2^{-x}) \\ &= (2^x + 2^{-x})\{(2^x)^2 - 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2 - 24\} \\ &= (2^x + 2^{-x})\{(2^x + 2^{-x})^2 - 27\} \\ &= t(t^2 - 27) = t^3 - 27t \end{aligned}$$

答え： $f(x) = t^3 - 27t$

(2) 相加平均と相乗平均の関係より，$t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ が成り立つ．ここで，等号成立は $2^x = 2^{-x}$ のとき，すなわち $x = 0$ のときで，0 は指定された x の範囲内にある．

答え： 最小値 2 ($x = 0$ のとき)

(3) $g(t) = t^3 - 27t$ とおく．$g'(t) = 3t^2 - 27 = 3(t+3)(t-3)$ より，$g(t)$ の増減表は以下のようになる：

t	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	54	$\searrow$	-54	$\nearrow$

この増減表を $t \geq 2$ の範囲で見ることにより

$$f(x) \text{ の最小値は } -54 \iff 0 \leq x \leq 2 \text{ かつ } 2^x + 2^{-x} = 3 \text{ を満たす } x \text{ が存在する}$$

$s = 2^x$ とおくと

$$2^x + 2^{-x} = 3 \iff s^2 - 3s + 1 = 0 \iff s = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ここで

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 2^2$$

より，$2^x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ となる x が $0 \leq x \leq 2$ を満たす．よって，$f(x)$ は $x = \log_2 \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ のとき最小値 -54 をとる．

答え： 最小値 -54，$x = \log_2 \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ のとき

得点	

数　　　学

氏名

受験番号

2　座標平面上に 2 点 P(3, 0), Q(0, 4) がある。x 軸，y 軸，および線分 PQ のいずれにも接する円で，中心が第 1 象限にあるものを C とする。

(1) 円 C の半径を求めよ。

(2) 円 C と線分 PQ の接点の座標を求めよ。

[解答欄]

(1)　C の半径を r とすると，C は次のように表せる：

$$C : (x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \quad \cdots \quad (\text{ア})$$

また，直線 PQ は次のように表せる：

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{4}{3}x + 4 \quad \cdots \quad (\text{イ})$$

(ア) に (イ) を代入すると

$$(x-r)^2 + \left\{-\frac{4}{3}x + (4-r)\right\}^2 = r^2 \quad \text{すなわち} \quad 25x^2 + 6(r-16)x + 9(4-r)^2 = 0 \quad \cdots \quad (\text{ウ})$$

この 2 次方程式の判別式が 0 となる r で正のものが求める半径である．ここで

$$\begin{aligned} \text{判別式} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \{6(r-16)\}^2 - 4 \times 25 \times 9(4-r)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad r - 16 = \pm 5(4-r) \\ &\Longleftrightarrow \quad r = 1,\ 6 \end{aligned}$$

よって，円 C の半径は 1 または 6 である．

<u>答え：1 または 6</u>

(2)　C の半径が 1 のとき，求める接点の x 座標は，(ウ) より

$$x = \frac{6(16-1)}{2 \times 25} = \frac{9}{5}$$

このとき，求める接点の y 座標は，(イ) より

$$y = -\frac{4}{3} \times \frac{9}{5} + 4 = \frac{8}{5}$$

同様に，C の半径が 6 のとき

$$x = \frac{6(16-6)}{2 \times 25} = \frac{6}{5}, \quad y = -\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} + 4 = \frac{12}{5}$$

<u>答え：C の半径が 1 のとき $\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$，$C$ の半径が 6 のとき $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$</u>

得点

数　　学

氏名	

受験番号	

3 $\theta_n = \dfrac{\pi}{4n(n+1)}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，初項がそれぞれ $a_1 = \cos\theta_1$, $b_1 = \sin\theta_1$ で与えられ，漸化式 $a_{n+1} = a_n\cos\theta_{n+1} - b_n\sin\theta_{n+1}$, $b_{n+1} = a_n\sin\theta_{n+1} + b_n\cos\theta_{n+1}$ を満たす。

(1) a_2, b_2 の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答欄]

(1)

$$\begin{aligned} a_2 &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2) \quad \text{(加法定理)} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b_2 &= \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 = \sin(\theta_1+\theta_2) \quad \text{(加法定理)} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

答え： $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{2}$

(2) すべての自然数 n について

$$a_n = \cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n), \quad b_n = \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n) \quad \cdots \quad (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

・ $n = 1$ のとき $(*)$ は正しい．

・ n のとき $(*)$ は正しいと仮定する．このとき，漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)\cos\theta_{n+1} - \sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)\sin\theta_{n+1} \\ &= \cos(\theta_1+\cdots+\theta_{n+1}) \quad \text{(加法定理)} \\ b_{n+1} &= \cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)\sin\theta_{n+1} + \sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)\cos\theta_{n+1} \\ &= \sin(\theta_1+\cdots+\theta_{n+1}) \quad \text{(加法定理)} \end{aligned}$$

となり，$(*)$ は $n+1$ のときも正しい．よって，数学的帰納法により $(*)$ はすべての自然数 n について正しい．

ここで

$$\begin{aligned} \theta_1 + \cdots + \theta_n &= \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n\pi}{4(n+1)} \end{aligned}$$

より，$a_n = \cos\dfrac{n\pi}{4(n+1)}$, $b_n = \sin\dfrac{n\pi}{4(n+1)}$ となる．

答え： $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{4(n+1)}$, $b_n = \sin\dfrac{n\pi}{4(n+1)}$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

4 四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=2$ かつ $\mathrm{BC}=3$ であるとする。$\triangle\mathrm{OBC}$ の重心を G とするとき，直線 AG は $\triangle\mathrm{OBC}$ を含む平面に垂直であるとする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。

(3) 点 B から $\triangle\mathrm{OAC}$ を含む平面に下ろした垂線は，直線 AG と交わらないことを示せ。

[解答欄]

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする.

(1)

$$\begin{aligned}3^2 &= \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\ &= |\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=2^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2^2\end{aligned}$$

より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}(2^2+2^2-3^2)=-\frac{1}{2}$$

答え： $-\frac{1}{2}$

(2)　仮定より $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\vec{c}$ は垂直で，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a}$ なので

$$0=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{3}|\vec{c}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}$$

よって，(1) の結果より

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\times 2^2=\frac{7}{6}$$

答え： $\frac{7}{6}$

(3)　直線 AG 上の任意の点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が $\triangle\mathrm{OAC}$ を含む平面に垂直ではないことを示せばよい．そのために，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が $\vec{c}$ に垂直ではないことを示す.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AG}}\qquad(s\text{ は実数})$$

と表わせるので

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\vec{a}-\vec{b})+s\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}+s\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\vec{c}$$

となるが，仮定より $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\vec{c}=0$ が成り立つことと，(1), (2) の結果を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{7}{6}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}\neq 0$$

これは，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が $\vec{c}$ に垂直ではないことを意味する．よって，題意が示された.

得点	

数　　　学

氏名		受験番号	

5　a, b, c は定数で，$a>0$ とする。関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は，$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$，$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=0$，$\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx=\frac{2}{5}$ を満たすとする。

(1) a, b, c の値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

［解答欄］

(1) $\int_{-1}^{1} xdx=\int_{-1}^{1} x^3dx=0$ に注意する．

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1} f(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+cx\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}a+2c \quad \cdots \quad (\text{ア})\\
0 &= \int_{-1}^{1} xf(x)dx=\left[\frac{1}{3}bx^3\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}b \quad \cdots \quad (\text{イ})\\
\frac{2}{5} &= \int_{-1}^{1} f(x)^2dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+c)^2dx \qquad ((\text{イ})\text{ より，}b=0)\\
&= \int_{-1}^{1}(a^2x^4+2acx^2+c^2)dx=\left[\frac{1}{5}a^2x^4+\frac{2}{3}acx^3+c^2x\right]_{-1}^{1}\\
&= \frac{2}{5}a^2+\frac{4}{3}ac+2c^2 \quad \cdots \quad (\text{ウ})
\end{aligned}$$

(ア) より，$c=-\frac{1}{3}a$．これを (ウ) に代入して

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)a^2=\frac{2}{5} \quad \text{すなわち} \quad a^2=\frac{9}{4}$$

よって，$a>0$ に注意して，$a=\frac{3}{2}$．したがって，$c=-\frac{1}{2}$.

答え： $a=\frac{3}{2}, b=0, c=-\frac{1}{2}$

(2)

$$f(x)=x \iff \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}=x \iff x=-\frac{1}{3}, 1$$

よって，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ の交点の x 座標は $-\frac{1}{3}, 1$．また，$-\frac{1}{3}\leq x\leq 1$ において

$$x-f(x)=\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)(1-x)\geq 0$$

なので

$$\begin{aligned}
\text{求める面積} &= \frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(x+\frac{1}{3}\right)(1-x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(-3x^2+2x+1)dx\\
&= \frac{1}{2}\left[-x^3+x^2+x\right]_{-\frac{1}{3}}^{1}=\frac{16}{27}
\end{aligned}$$

答え： $\frac{16}{27}$

得点	