理工 1

数　　　学

氏名	

受験番号	

1　関数 $f(x) = 2^{3x} + 2^{-3x} - 3 \cdot 2^{3+x} - 3 \cdot 2^{3-x}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ がある。$t = 2^x + 2^{-x}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ とする。

(1) $f(x)$ を t を用いて表せ。

(2) t の最小値を求めよ。

(3) $f(x)$ の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

［解答欄］

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2^x)^3 + (2^{-x})^3 - 3 \cdot 2^3(2^x + 2^{-x}) \\ &= (2^x + 2^{-x})\{(2^x)^2 - 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2 - 24\} \\ &= (2^x + 2^{-x})\{(2^x + 2^{-x})^2 - 27\} \\ &= t(t^2 - 27) = t^3 - 27t \end{aligned}$$

答え： $f(x) = t^3 - 27t$

(2)　相加平均と相乗平均の関係より，$t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ が成り立つ．ここで，等号成立は $2^x = 2^{-x}$ のとき，すなわち $x = 0$ のときで，0 は指定された x の範囲内にある．

答え： 最小値 2 ($x = 0$ のとき)

(3)　$g(t) = t^3 - 27t$ とおく．$g'(t) = 3t^2 - 27 = 3(t+3)(t-3)$ より，$g(t)$ の増減表は以下のようになる：

t	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	54	$\searrow$	-54	$\nearrow$

この増減表を $t \geq 2$ の範囲で見ることにより

$$f(x) \text{ の最小値は } -54 \iff 0 \leq x \leq 2 \text{ かつ } 2^x + 2^{-x} = 3 \text{ を満たす } x \text{ が存在する}$$

$s = 2^x$ とおくと

$$2^x + 2^{-x} = 3 \iff s^2 - 3s + 1 = 0 \iff s = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ここで

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 2^2$$

より，$2^x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ となる x が $0 \leq x \leq 2$ を満たす．よって，$f(x)$ は $x = \log_2 \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき最小値 -54 をとる．

答え： 最小値 -54，$x = \log_2 \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき

得点	

理工 2

数　　　学

氏名	

受験番号	

2 複素数平面上の点 z と点 w の関係は，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ であるとする。ただし，i は虚数単位である。

(1) $z=1-2i$ のとき，w の実部を求めよ。

(2) 点 w が点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 z が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

[解答欄]

(1)　$z=1-2i$ のとき，$z+i=1-i,\ z-i=1-3i$ より

$$\begin{aligned} w &= \frac{1-3i}{1-i}=\frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{(1+3)+(1-3)i}{2}=2-i \end{aligned}$$

答え：2

(2)　与えられた条件は，$|w-(-1+i)|=1$ と同値である．よって

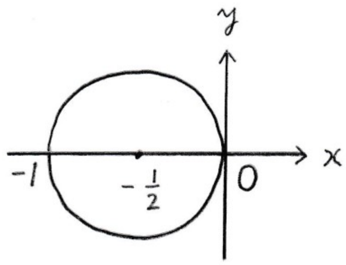
$$w-(-1+i)=\frac{z-i}{z+i}+1-i=\frac{(2-i)z+1}{z+i}$$

に注意すると，$z=x+yi$ (x,y は実数) とするとき

$$\begin{aligned} \text{与条件} &\iff |(2-i)z+1|=|z+i| \\ &\iff |(2-i)z+1|^2=|z+i|^2 \\ &\iff (2x+y+1)^2+(2y-x)^2=x^2+(y+1)^2 \\ &\iff x^2+x+y^2=0 \\ &\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

よって，点 z は中心が点 $-\dfrac{1}{2}$，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円周上を動く．

答え：



得点	

理工3

数　　学

氏名	

受験番号	

3　$\theta_n = \dfrac{\pi}{4n(n+1)}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とする。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は，初項がそれぞれ $a_1 = \cos\theta_1$, $b_1 = \sin\theta_1$ で与えられ，漸化式 $a_{n+1} = a_n\cos\theta_{n+1} - b_n\sin\theta_{n+1}$, $b_{n+1} = a_n\sin\theta_{n+1} + b_n\cos\theta_{n+1}$ を満たす。

(1) a_2, b_2 の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答欄]

(1)

$$\begin{aligned} a_2 &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2) \quad (\text{加法定理}) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b_2 &= \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 = \sin(\theta_1+\theta_2) \quad (\text{加法定理}) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

答え： $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{2}$

(2)　すべての自然数 n について

$$a_n = \cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n), \quad b_n = \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n) \quad \cdots \quad (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

・ $n=1$ のとき $(*)$ は正しい．

・ n のとき $(*)$ は正しいと仮定する．このとき，漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)\cos\theta_{n+1} - \sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)\sin\theta_{n+1} \\ &= \cos(\theta_1+\cdots+\theta_{n+1}) \quad (\text{加法定理}) \\ b_{n+1} &= \cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)\sin\theta_{n+1} + \sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)\cos\theta_{n+1} \\ &= \sin(\theta_1+\cdots+\theta_{n+1}) \quad (\text{加法定理}) \end{aligned}$$

となり，$(*)$ は $n+1$ のときも正しい．よって，数学的帰納法により $(*)$ はすべての自然数 n について正しい．

ここで

$$\begin{aligned} \theta_1 + \cdots + \theta_n &= \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n\pi}{4(n+1)} \end{aligned}$$

より，$a_n = \cos\dfrac{n\pi}{4(n+1)}$, $b_n = \sin\dfrac{n\pi}{4(n+1)}$ となる．

答え： $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{4(n+1)}$, $b_n = \sin\dfrac{n\pi}{4(n+1)}$

得点	

理工 4

数　　　学

氏名	

受験番号	

$\boxed{4}$ 四面体 OABC において，OA = OB = OC = 2 かつ BC = 3 であるとする。△OBC の重心を G とするとき，直線 AG は △OBC を含む平面に垂直であるとする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。

(3) 点 B から △OAC を含む平面に下ろした垂線は，直線 AG と交わらないことを示せ。

[解答欄]

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

(1)

$$\begin{aligned}3^2 &= \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\ &= |\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=2^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2^2\end{aligned}$$

より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}(2^2+2^2-3^2)=-\frac{1}{2}$$

答え： $-\dfrac{1}{2}$

(2)　仮定より $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\vec{c}$ は垂直で，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a}$ なので

$$0=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{3}|\vec{c}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}$$

よって，(1) の結果より

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\times 2^2=\frac{7}{6}$$

答え： $\dfrac{7}{6}$

(3)　直線 AG 上の任意の点を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が △OAC を含む平面に垂直ではないことを示せばよい．そのために，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が $\vec{c}$ に垂直ではないことを示す．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AG}}\qquad (s\text{ は実数})$$

と表わせるので

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\vec{a}-\vec{b})+s\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}+s\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\vec{c}$$

となるが，仮定より $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\vec{c}=0$ が成り立つことと，(1), (2) の結果を用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{7}{6}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}\neq 0$$

これは，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が $\vec{c}$ に垂直ではないことを意味する．よって，題意が示された．

得点	

理工 5

数　　　学

氏名	

受験番号	

5　関数 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\log x\ (1 \leqq x \leqq e)$ と，その逆関数 $f^{-1}(x)\ (f(1) \leqq x \leqq f(e))$ について，以下の問に答えよ。ただし，$\log x$ は e を底とする自然対数である。

(1) 定積分 $\int_1^e f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)\ (1 \leqq x \leqq e)$ の長さを求めよ。

(3) 定積分 $\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x)\,dx$ を求めよ。

［解答欄］

(1)

$$\int_1^e f(x)dx=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(x\log x-x)\right]_1^e=\frac{1}{12}(e^3-1)-\frac{1}{2}=\frac{e^3}{12}-\frac{7}{12}$$

答え： $\frac{e^3}{12}-\frac{7}{12}$

(2)

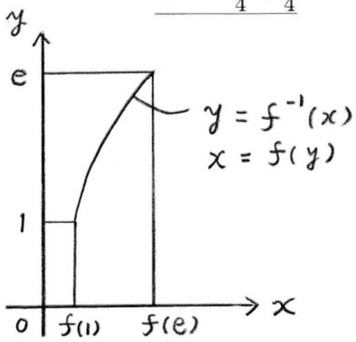
$$\begin{aligned}\sqrt{1+f'(x)^2} &= \sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}^2}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}^2}\\ &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \qquad (x\text{ は正より})\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\text{求める曲線の長さ} &= \int_1^e \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\log x\right]_1^e\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

答え： $\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

(3)　図より面積を比較して



$$\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx+\int_1^e f(x)dx+f(1)=ef(e)$$

よって，(1) の結果を用いて

$$\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx=e\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{e^3}{12}-\frac{7}{12}\right)-\frac{1}{4}=\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}+\frac{1}{3}$$

答え： $\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}+\frac{1}{3}$

得点	