

数 学

教育 1

氏 名

受 験
番 号

1

関数 $f(x) = 2^{3x} + 2^{-3x} - 3 \cdot 2^{3+x} - 3 \cdot 2^{3-x}$ ($0 \leq x \leq 2$) がある。 $t = 2^x + 2^{-x}$ ($0 \leq x \leq 2$) とする。

- (1) $f(x)$ を t を用いて表せ。
- (2) t の最小値を求めよ。
- (3) $f(x)$ の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

[解答欄]

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2^x)^3 + (2^{-x})^3 - 3 \cdot 2^3(2^x + 2^{-x}) \\ &= (2^x + 2^{-x})\{(2^x)^2 - 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2 - 24\} \\ &= (2^x + 2^{-x})\{(2^x + 2^{-x})^2 - 27\} \\ &= t(t^2 - 27) = t^3 - 27t \end{aligned}$$

答え : $f(x) = t^3 - 27t$

(2) 相加平均と相乗平均の関係より, $t \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ が成り立つ. ここで, 等号成立は $2^x = 2^{-x}$ のとき, すなわち $x = 0$ のときで, 0 は指定された x の範囲内にある.

答え : 最小値 2 ($x = 0$ のとき)

(3) $g(t) = t^3 - 27t$ とおく. $g'(t) = 3t^2 - 27 = 3(t+3)(t-3)$ より, $g(t)$ の増減表は以下のようになる :

t	...	-3	...	3	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	54	↘	-54	↗

この増減表を $t \geq 2$ の範囲で見ることにより

$f(x)$ の最小値は $-54 \iff 0 \leq x \leq 2$ かつ $2^x + 2^{-x} = 3$ を満たす x が存在する

$s = 2^x$ とおくと

$$2^x + 2^{-x} = 3 \iff s^2 - 3s + 1 = 0 \iff s = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ここで

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 2^2$$

より, $2^x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ となる x が $0 \leq x \leq 2$ を満たす. よって, $f(x)$ は $x = \log_2 \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ のとき最小値 -54 をとる.

答え : 最小値 -54 , $x = \log_2 \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ のとき

得
点

数 学

教育 2

氏 名

受 験
番 号

2

複素数平面上の点 z と点 w の関係は、 $w = \frac{z-i}{z+i}$ であるとする。ただし、 i は虚数単位である。

(1) $z = 1 - 2i$ のとき、 w の実部を求めよ。

(2) 点 w が点 $-1 + i$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、点 z が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

[解答欄]

(1) $z = 1 - 2i$ のとき、 $z + i = 1 - i$ 、 $z - i = 1 - 3i$ より

$$\begin{aligned} w &= \frac{1-3i}{1-i} = \frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{(1+3) + (1-3)i}{2} = 2 - i \end{aligned}$$

答え： 2

(2) 与えられた条件は、 $|w - (-1 + i)| = 1$ と同値である。よって

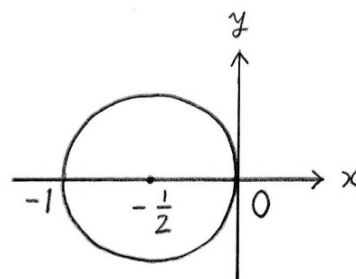
$$w - (-1 + i) = \frac{z-i}{z+i} + 1 - i = \frac{(2-i)z+1}{z+i}$$

に注意すると、 $z = x + yi$ (x, y は実数) とするとき

$$\begin{aligned} \text{与条件} &\iff |(2-i)z+1| = |z+i| \\ &\iff |(2-i)z+1|^2 = |z+i|^2 \\ &\iff (2x+y+1)^2 + (2y-x)^2 = x^2 + (y+1)^2 \\ &\iff x^2 + x + y^2 = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

よって、点 z は中心が点 $-\frac{1}{2}$ 、半径が $\frac{1}{2}$ の円周上を動く。

答え：



得
点

数 学

教育 3

氏 名

受 験
番 号

3

$\theta_n = \frac{\pi}{4n(n+1)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は、初項がそれぞれ $a_1 = \cos \theta_1$, $b_1 = \sin \theta_1$ で与えられ、漸化式 $a_{n+1} = a_n \cos \theta_{n+1} - b_n \sin \theta_{n+1}$, $b_{n+1} = a_n \sin \theta_{n+1} + b_n \cos \theta_{n+1}$ を満たす。

- (1) a_2 , b_2 の値を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

[解答欄]

(1)

$$\begin{aligned} a_2 &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{加法定理}) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b_2 &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{加法定理}) \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

答え : $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_2 = \frac{1}{2}$

(2) すべての自然数 n について

$$a_n = \cos(\theta_1 + \dots + \theta_n), \quad b_n = \sin(\theta_1 + \dots + \theta_n) \quad \dots \quad (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

- ・ $n = 1$ のとき (*) は正しい。
- ・ n のとき (*) は正しいと仮定する。このとき、漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \cos(\theta_1 + \dots + \theta_n) \cos \theta_{n+1} - \sin(\theta_1 + \dots + \theta_n) \sin \theta_{n+1} \\ &= \cos(\theta_1 + \dots + \theta_{n+1}) \quad (\text{加法定理}) \\ b_{n+1} &= \cos(\theta_1 + \dots + \theta_n) \sin \theta_{n+1} + \sin(\theta_1 + \dots + \theta_n) \cos \theta_{n+1} \\ &= \sin(\theta_1 + \dots + \theta_{n+1}) \quad (\text{加法定理}) \end{aligned}$$

となり、(*) は $n+1$ のときも正しい。よって、数学的帰納法により (*) はすべての自然数 n について正しい。

ここで

$$\begin{aligned} \theta_1 + \dots + \theta_n &= \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n\pi}{4(n+1)} \end{aligned}$$

より、 $a_n = \cos \frac{n\pi}{4(n+1)}$, $b_n = \sin \frac{n\pi}{4(n+1)}$ となる。

答え : $a_n = \cos \frac{n\pi}{4(n+1)}$, $b_n = \sin \frac{n\pi}{4(n+1)}$

得
点

数 学

教育 4

氏 名

受 験
番 号

4 四面体 OABC において、 $OA = OB = OC = 2$ かつ $BC = 3$ であるとする。 $\triangle OBC$ の重心を G とするとき、直線 AG は $\triangle OBC$ を含む平面に垂直であるとする。

- (1) 内積 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ を求めよ。
- (2) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ を求めよ。
- (3) 点 B から $\triangle OAC$ を含む平面に下ろした垂線は、直線 AG と交わらないことを示せ。

[解答欄]

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。

(1)

$$\begin{aligned} 3^2 &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 2^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2^2 \end{aligned}$$

より

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}(2^2 + 2^2 - 3^2) = -\frac{1}{2}$$

答え: $-\frac{1}{2}$

(2) 仮定より $\overrightarrow{AG}$ と $\vec{c}$ は垂直で、 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a}$ なので

$$0 = \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a}\right) \cdot \vec{c} = \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}|\vec{c}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

よって、(1) の結果より

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \times 2^2 = \frac{7}{6}$$

答え: $\frac{7}{6}$

(3) 直線 AG 上の任意の点を P とする。このとき、 $\overrightarrow{BP}$ が $\triangle OAC$ を含む平面に垂直ではないことを示せばよい。そのために、 $\overrightarrow{BP}$ が $\vec{c}$ に垂直ではないことを示す。

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AG} \quad (s \text{ は実数})$$

と表わせるので

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = (\vec{a} - \vec{b}) + s\overrightarrow{AG}$$

よって

$$\overrightarrow{BP} \cdot \vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} + s\overrightarrow{AG} \cdot \vec{c}$$

となるが、仮定より $\overrightarrow{AG} \cdot \vec{c} = 0$ が成り立つことと、(1), (2) の結果を用いると

$$\overrightarrow{BP} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{7}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3} \neq 0$$

これは、 $\overrightarrow{BP}$ が $\vec{c}$ に垂直ではないことを意味する。よって、題意が示された。

数 学

教育 5

氏 名

受験
番 号

5

関数 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x$ ($1 \leq x \leq e$) と、その逆関数 $f^{-1}(x)$ ($f(1) \leq x \leq f(e)$) について、以下の問に答えよ。

ただし、 $\log x$ は e を底とする自然対数である。

(1) 定積分 $\int_1^e f(x) dx$ を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq e$) の長さを求めよ。

(3) 定積分 $\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$ を求めよ。

解答欄

(1)

$$\int_1^e f(x) dx = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} (x \log x - x) \right]_1^e = \frac{1}{12} (e^3 - 1) - \frac{1}{2} = \frac{e^3}{12} - \frac{7}{12}$$

答え : $\frac{e^3}{12} - \frac{7}{12}$

(2)

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + f'(x)^2} &= \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right\}^2} = \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \quad (x \text{ は正より}) \end{aligned}$$

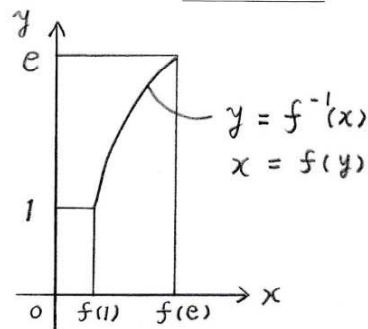
よって

$$\begin{aligned} \text{求める曲線の長さ} &= \int_1^e \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 + \log x \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

答え : $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

(3) 図より面積を比較して

$$\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx + \int_1^e f(x) dx + f(1) = ef(e)$$



よって、(1) の結果を用いて

$$\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx = e \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{e^3}{12} - \frac{7}{12} \right) - \frac{1}{4} = \frac{e^3}{6} - \frac{e}{2} + \frac{1}{3}$$

答え : $\frac{e^3}{6} - \frac{e}{2} + \frac{1}{3}$

得
点